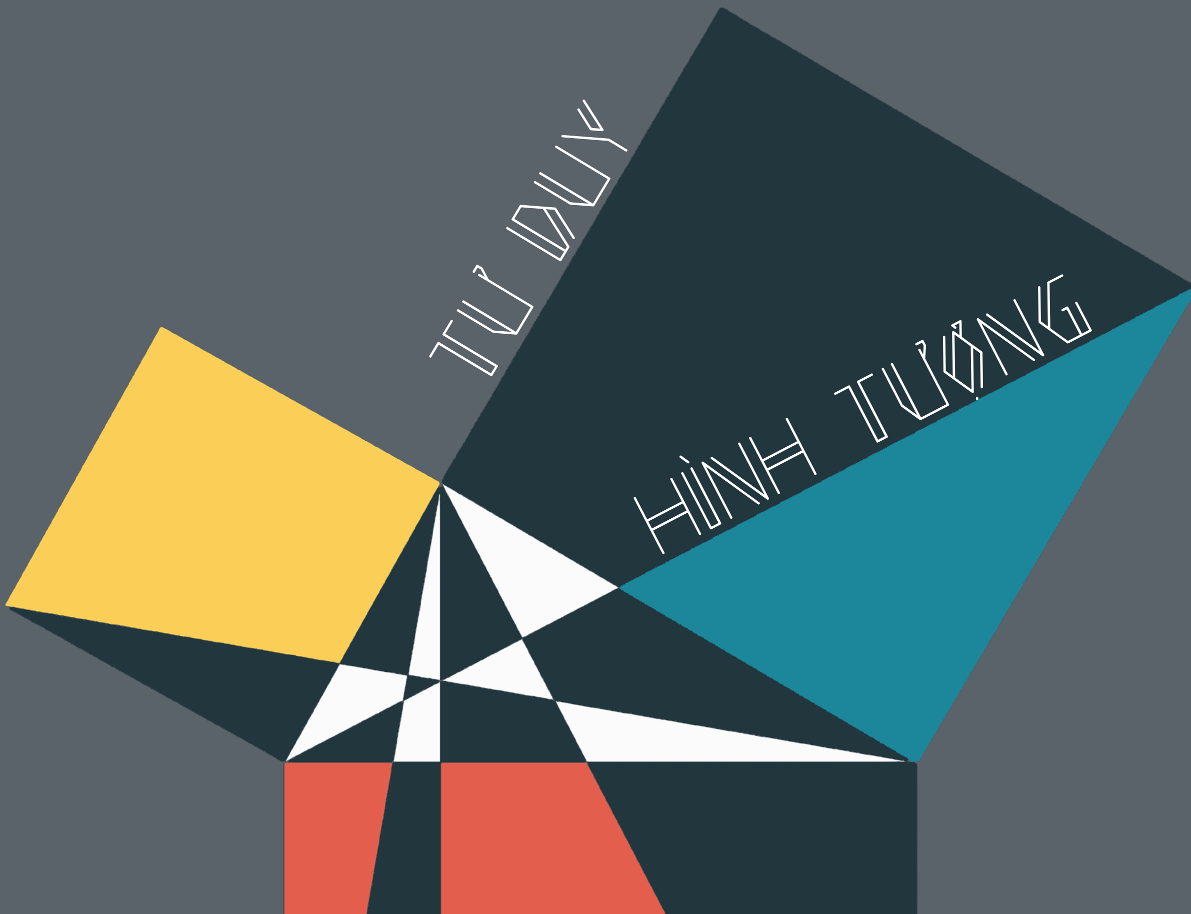
ĐỖ MINH TRIẾT



CHỨNG MINH KHÔNG DÙNG LỜI

facebook.com/mathtasyvn
instagram.com/mathtasythkt
bit.ly/mathtasy
tủ sách -MATHTASY-

CHỨNG MINH KHÔNG DÙNG LỜI

Tư duy hình tượng

CHỨNG MINH KHÔNG DÙNG LỜI

Đỗ Minh Triết

Xuất bản 2021 bởi Mathtasy

Pulished 2021 by Mathtasy

fb page: facebook.com/mathtasyvn || blog: toanhockithu.wordpress.com

mathtasy@gmail.com || trietdo@hotmail.com

ĐỖ MINH TRIẾT

CHỨNG MINH KHÔNG DÙNG LỜI

TƯ DUY HÌNH TƯỢNG

tủ sách - Mathtasy -

Quyển sách này dành tặng bạn

- thành viên yêu dấu của Mathtasy.

"Tôi không có tài năng gì. Tôi chỉ đam mê hiểu biết."

- ALBERT EINSTEIN

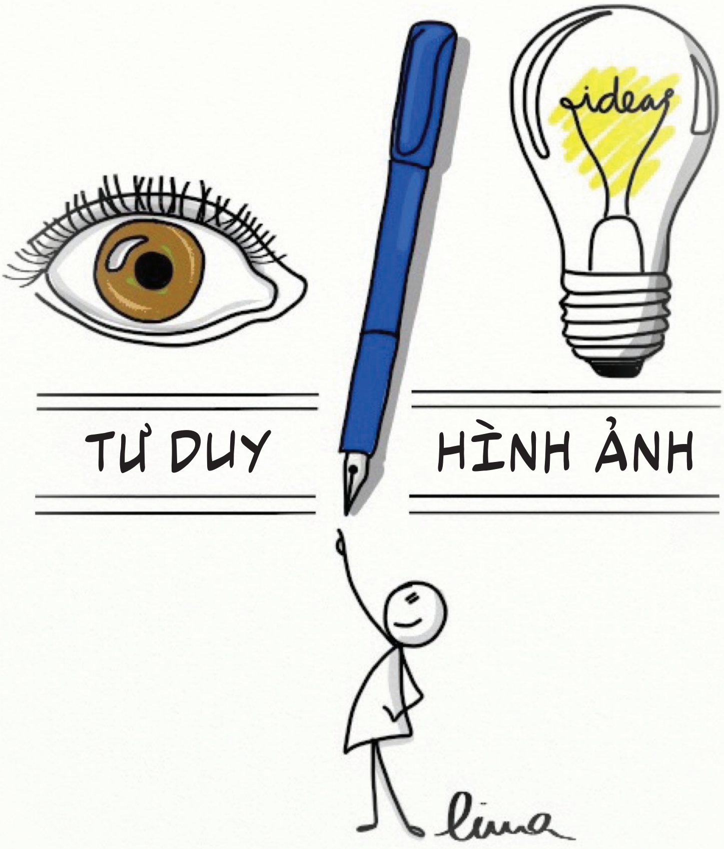
lời cám ơn. . .

Khi bạn đang đọc những dòng chữ tức là bạn đã sở hữu, đã đọc và đã đánh giá một trong ba tựa sách của tủ sách Mathtasy trên Goodreads, đó là "Tỉ lệ vàng (hay là dãy số Fibonacci)", "Chữ số và Thế giới: Nguồn gốc bị lãng quên", "Bạn biết bao nhiêu về toán?". Điều đó cho thấy bạn đã quan tâm đến Mathtasy hoặc tác giả bởi vì thông tin nhận được ebook chỉ được phổ biến qua hai nguồn này. Hơn nữa, có lẽ bạn cũng muốn biết thêm hơn nữa về thế giới toán học kỳ thú mà trong đó, chứng minh không dùng lời là một khía cạnh không thể bỏ qua.

Mathtasy cũng như tác giả cảm ơn bạn! Vì không phải lợi nhuận, tiếng tăm mà mà sự quan tâm của độc giả mới là động lực cho tác giả thực hiện.

Mục lục

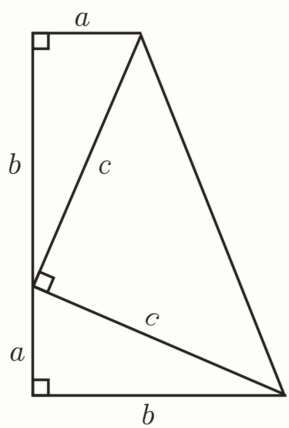
Các chuỗi số (tổng vô hạn) 50



Hình 1.

CHỨNG MINH KHÔNG DÙNG LỜI

Chứng minh không dùng lời, thuật ngữ gốc *"proofs without words"*, là cách thức sử dụng hình học hay biểu đồ nhằm nêu bật được bản chất vấn đề. Lấy một ví dụ minh hoạ cho định lý Pythagoras



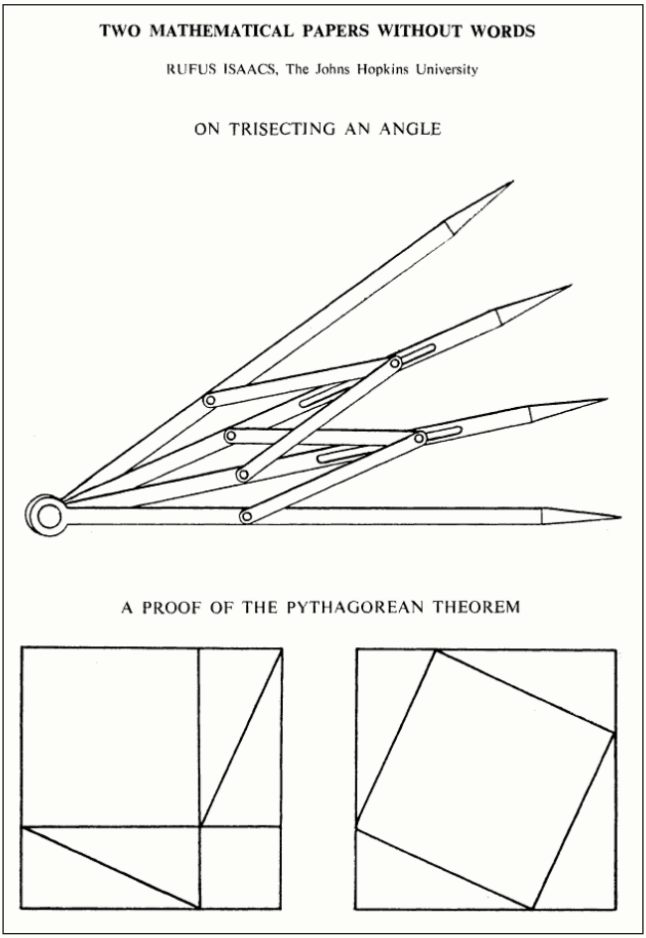
$$2 \cdot \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} (a + b)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Tất cả chỉ là các ký hiệu, các phép biến đổi toán học được sử dụng để đi đến kết quả. Không hề có ngôn từ giải thích nhưng vẫn đảm bảo được sự truyền đạt, người đọc hoàn toàn có thể tự hiểu mấu chốt vấn đề là ở diện tích hình tam giác.

Chứng minh không dùng lời lần đầu tiên được biết đến và dần phổ biến vào những năm 70, 80 khi mà Hiệp hội toán học Hoa Kỳ bắt đầu công bố chúng

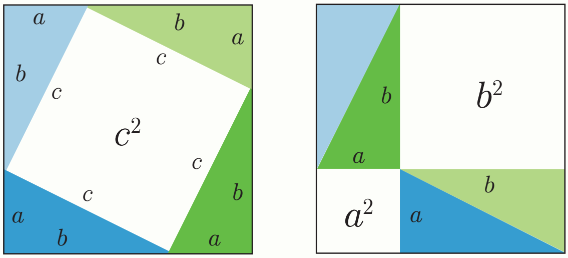
qua các tạp chí toán học Mathematics Magazine, The College Mathematics Journal. Martin Gardner, trong bài báo nổi tiếng của ông, *"Mathematical Games"* vào tháng 10 năm 1973 trên tạp chí Scientific American, giải thích rằng chứng minh không dùng lời như một *"biểu đồ nhìn – hiểu"*, người đọc có thể thấy được cốt lõi vấn đề chỉ trong chớp nhoáng.

Tính từ khi thuật ngữ này ra đời thì thì *chứng minh không dùng lời* đầu tiên được áp dụng cho định lý Pythagoras đăng tải trên tạp chí Mathematics Magazine vào tháng Chín năm 1975 bởi tác giả Rufus Isaacs, Đại học Johns Hopkins, Mỹ.



Hình 2. Chứng minh không dùng lời cho định lý Pythagoras đăng trên tạp chí Mathematics Magazine năm 1975.

Có thể diễn giải chứng minh của Issacs như sau: di chuyển bốn tam giác về bốn góc thì rõ ràng tổng diện tích hai hình vuông lúc đầu bằng diện tích hình vuông lúc sau, định lý Pythagoras được chứng minh.



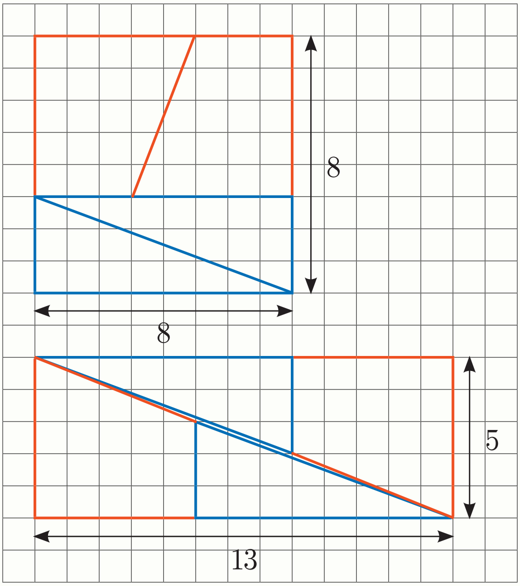
Hình 3. Diễn giải chứng minh của Issacs.

Kể từ đó, tạp chí Mathematics Magazine mỗi năm đăng tải một đến hai chứng minh không dùng lời. Đến năm 1987, con số tăng lên thành sáu. Không cần phải nói ra, các nhà toán học đã bắt đầu chú ý đến những *viên ngọc quý giá* của toán học này. Giáo sư Roger Nelsen của Đại học Lewis và Clark ở Portland, Oregon, cũng không ngoại lệ, ông công bố một chứng minh không dùng lời vô cùng độc đáo cho bất đẳng thức AM-GM-HM. Không lâu sau đó, ông được đề nghị phụ trách mảng này cho tạp chí. Trong nhiều năm liền làm việc, ông đã sáng tạo rất nhiều chứng minh không dùng lời, số lượng đủ để làm nên một tựa sách riêng. Năm 1993, ông xuất bản quyển *"Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking"* và phần tiếp theo của nó, *"Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking"* vào năm 2000.

Trong những khoảng thời gian này, chứng minh không dùng lời luôn bị hoài nghi liệu nó có phải là một chứng minh thực sự không? Câu trả lời đương nhiên là không. Chính Nelsen trong bài đầu tiên của mình cũng nhận định như vậy. Tuy không phải là một chứng minh thuần tuý nhưng chứng minh không dùng lời thực sự có giá trị toán học, nó như một bản phác thảo kiến trúc mà không đi quá sâu vào chi tiết, giúp người xem hiểu được vì sao mệnh đề đang xét là đúng, đồng thời có thể *suy ra* được cách chứng minh thực sự. Vì những đặc tính đó, chứng minh không dùng lời được xem là cách thức mô phỏng, phác thảo chứng minh thực sự bằng hình ảnh, là sự áp dụng kết quả

vào hình học và là phương pháp tư duy hình tượng ở mức độ cao.

Nếu đòi hỏi một lý lẽ thuyết phục chứng tỏ chứng minh không dùng lời không thể là một chứng minh thực sự thì sau đây là một ví dụ. Một chứng minh không dùng lời $64 = 65$, từ một hình vuông ban đầu cạnh 8 có diện tích $8 \times 8 = 64$ được chia làm bốn hình: 2 tam giác vuông bằng nhau, 2 hình thang vuông bằng nhau, rồi ghép lại để được một hình chữ nhật mới có diện tích $5 \times 13 = 65$. Vì cả hai hình vuông ban đầu và hình chữ nhật mới được tạo thành từ 4 mảnh ghép như nhau nên chúng phải có diện tích bằng nhau, tức là $64 = 65$.

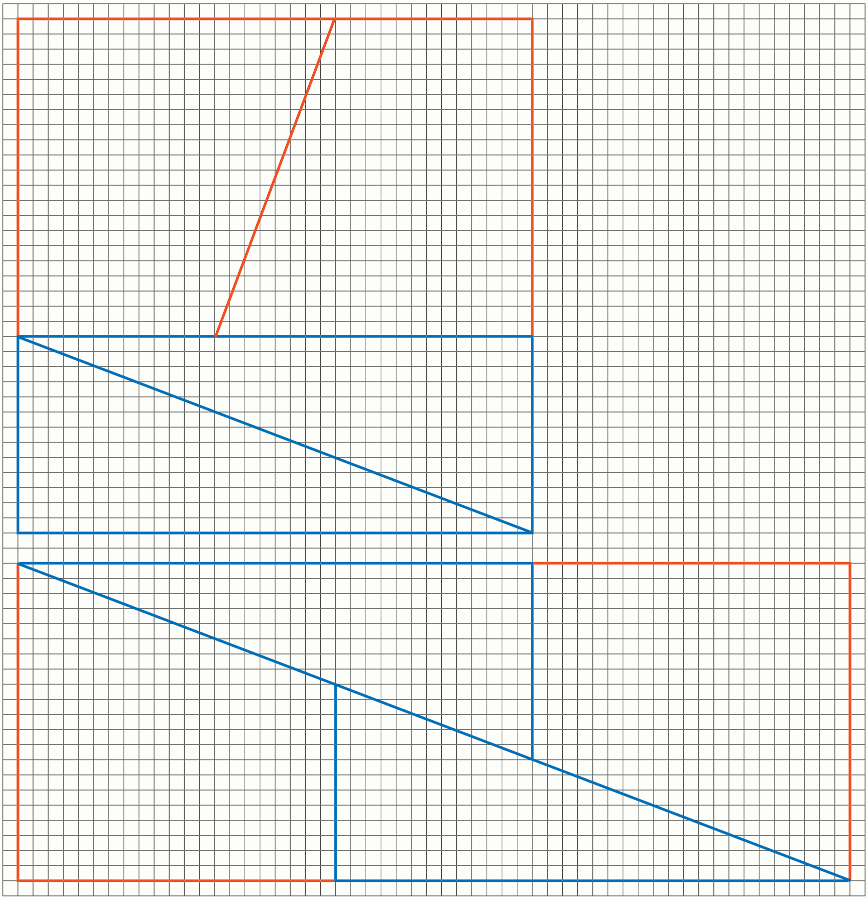


Hình 4. 64 = 65.

Nếu để ý kĩ, bạn sẽ thấy ở hình chữ nhật mới được tạo thành, trung tâm của nó là một hình bình hành siêu mảnh rất khó nhận thấy, nói một cách khác, các đường màu xanh, đỏ không hề trùng khớp lên nhau. Diện tích hình bình hành siêu mảnh này đúng bằng 1 và diện tích hình mới được tạo thành là $65 - 1 = 64$, bác bỏ lập luận sai lầm ban đầu.

Đó là một trong những điểm yếu của chứng minh không dùng lời, thể hiện trong những trường hợp hình vẽ không đủ tính tổng quát hoặc dễ gây ra

sự hiểu lầm. Hình 4 vẫn còn là trường hợp đơn giản dễ nhận ra, còn như ví dụ sau thì gần như là không thể

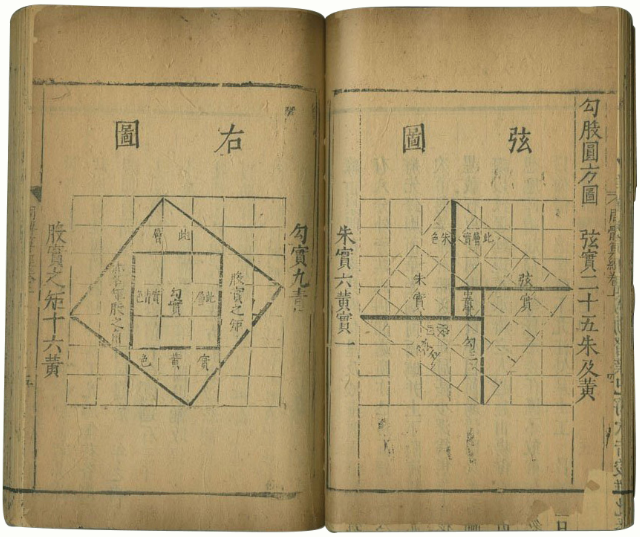


Hình 5. 1156 = 1155.

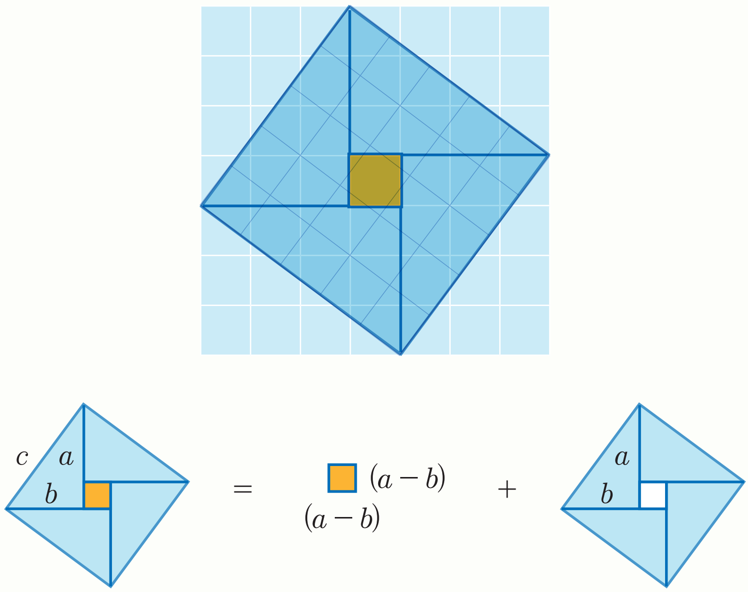
Tuy nhiên, đôi khi chứng minh không dùng lời lại tỏ ra ưu thế hơn so với chứng minh truyền thống.

Phương pháp tư duy hình tượng không phải là mới. Ngay từ thời xa xưa, xuyên suốt lịch sử trí tuệ, con người đã thể hiện ý tưởng toán học bằng hình ảnh. Một trong những văn tự toán học cổ xưa nhất Trung Hoa là *"Chu Bễ Toán Kinh"*[] thời nhà Chu[] được xác định là có niên đại vào khoảng năm 200 TCN. Nội dung văn tự viết về quan sát và tính toán thiên văn, bao gồm 246

vấn đề, trong số đó có một mô phỏng bằng hình ảnh về định lý Pythagoras. Về sau, *"Chu Bễ Toán Kinh"* được bổ sung và hoàn thiện bởi nhiều nhà toán học Trung Hoa khác qua hàng chục thế kỷ: Lưu Huy (263), Tổ Xung Chi (đầu thế kỷ thứ VI), Lý Thuần Phong (602–670) và Dương Huy (1270)[].



Hình 6. Trang sách của "Chu Bễ Toán Kinh" mô tả định lý Pythagoras.



$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2}$$

$$= a^2 + b^2$$

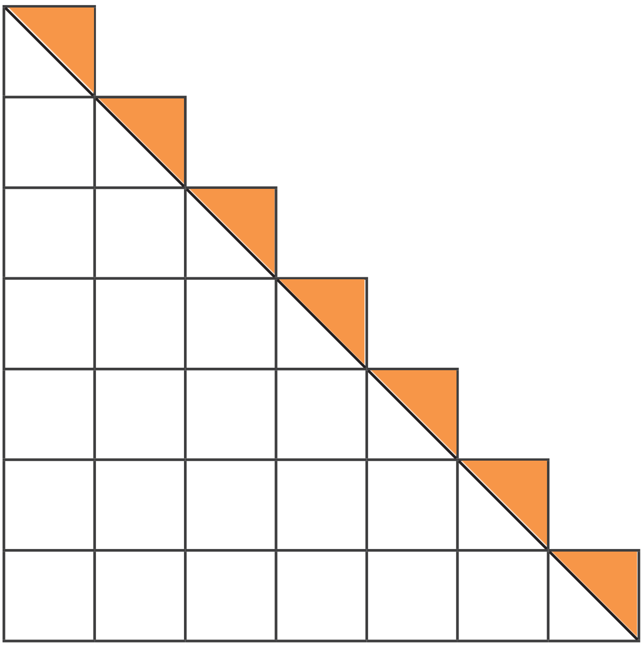
Hình 7. Diễn giải.

Một khi bạn đã nắm được khái niệm chứng minh không dùng lời và mục đích của nó thì sau đây là một số ví dụ minh họa, tất cả đều được sưu tầm từ các tạp chí toán học nổi tiếng của Mỹ thập niên 70-80 kèm theo tên tác giả. Để giữ đúng tinh thần của chứng minh không dùng lời, trừ hai ví dụ đầu thì mọi ví dụ sau đều không có sự giải thích hay phân tích diễn giải, trong trường hợp bạn cần đến điều đó, hãy tham khảo gợi ý ở PHỤ LỤC.

CÁC TỔNG TỰ NHIÊN

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN

Ian Richard

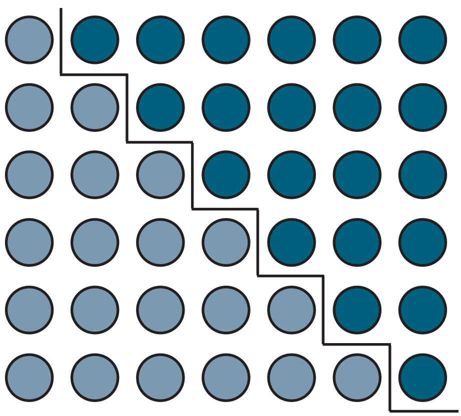


$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Hình 8.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN

Người Hy Lạp cổ đại

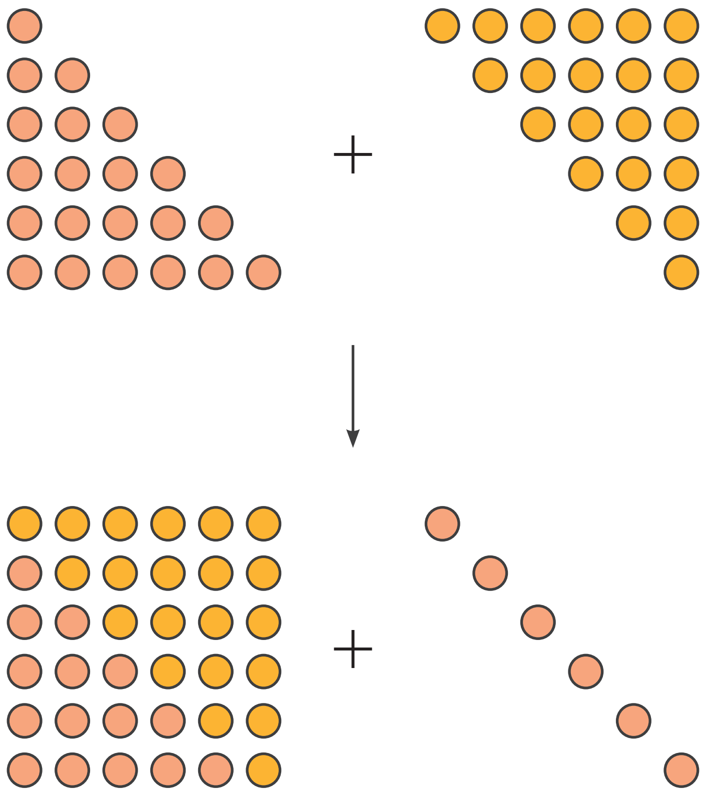


$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hình 9.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN

S. J. Farlow



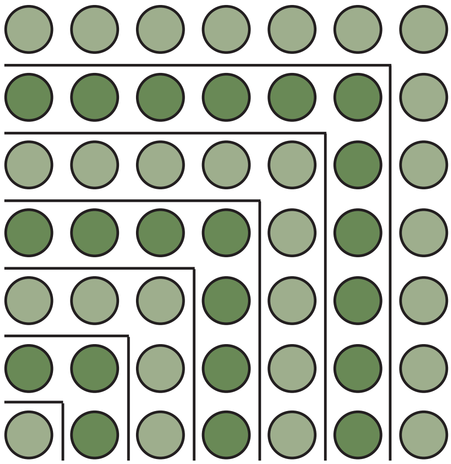
$$2(1 + 3 + 5 + ... + n) = n^2 + n$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Hình 10.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

Nicomachus of Gerasa (khoảng năm 100 TCN)

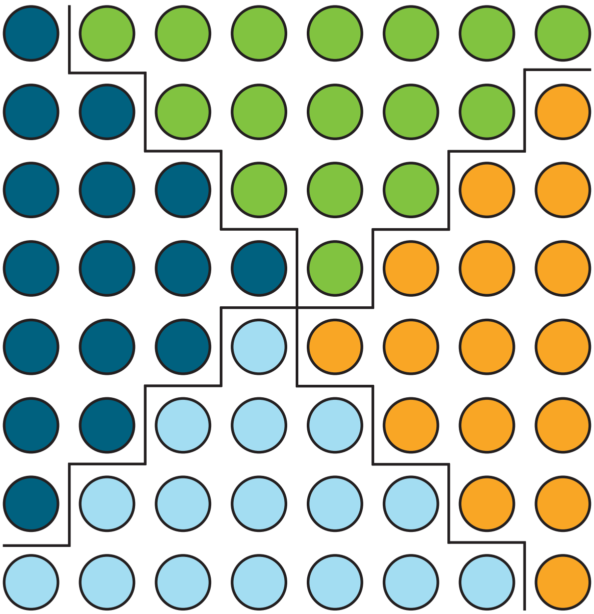


$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Hình 11.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

#!

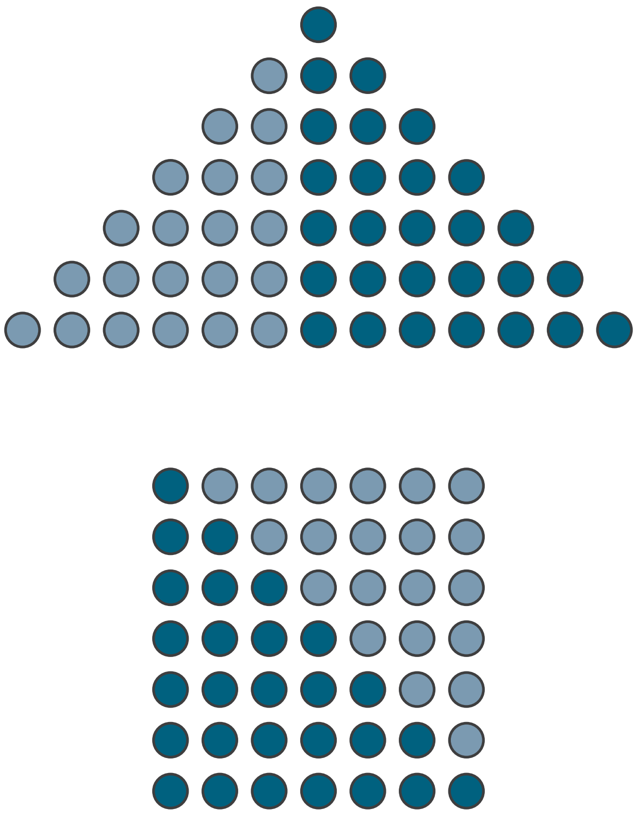


$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

Hình 12.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

#!

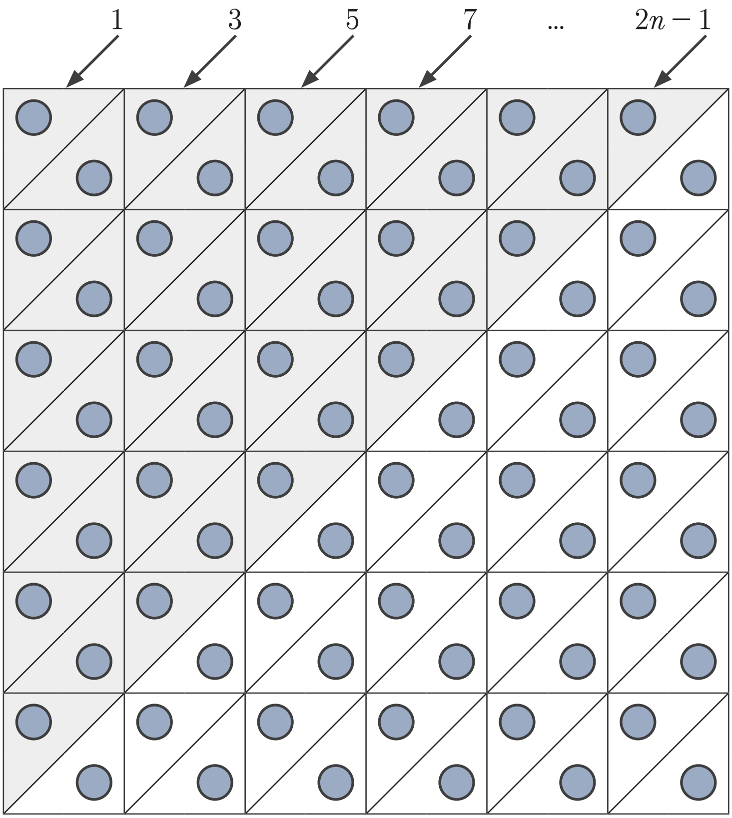


$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Hình 13.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

Timothée Duval



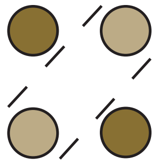
$$2[1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)] = 2n^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

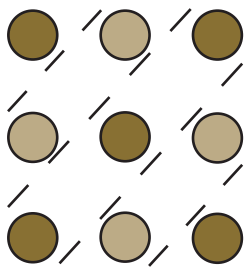
Hình 14.

TỔNG VÀ BÌNH PHƯƠNG (TỔNG N SỐ LẺ ĐẦU TIÊN)

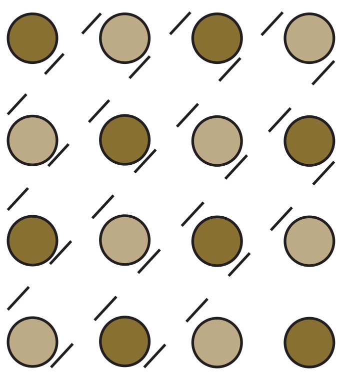
Người Hy Lạp cổ đại



$$1+2+1=2^2 \Rightarrow 1+3=2^2$$



$$1+2+3+2+1=3^2 \Rightarrow 1+3+5=3^2$$



$$1+2+3+4+3+2+1=4^2 \Rightarrow 1+3+5+7=4^2$$

$$\vdots$$

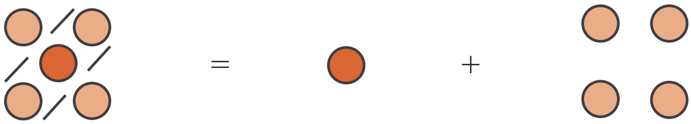
$$1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+2+1=n^2$$

$$\Leftrightarrow 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

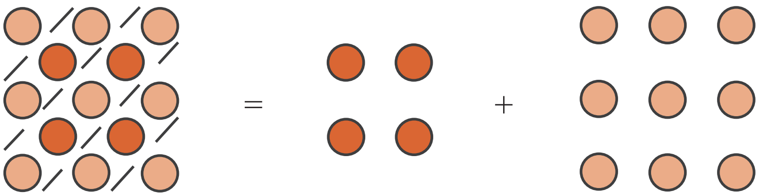
Hình 15.

TỔNG VÀ BÌNH PHƯƠNG

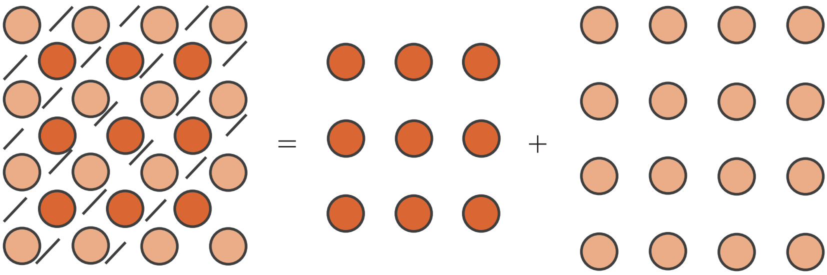
Hee Sik Kim



$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$



$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$



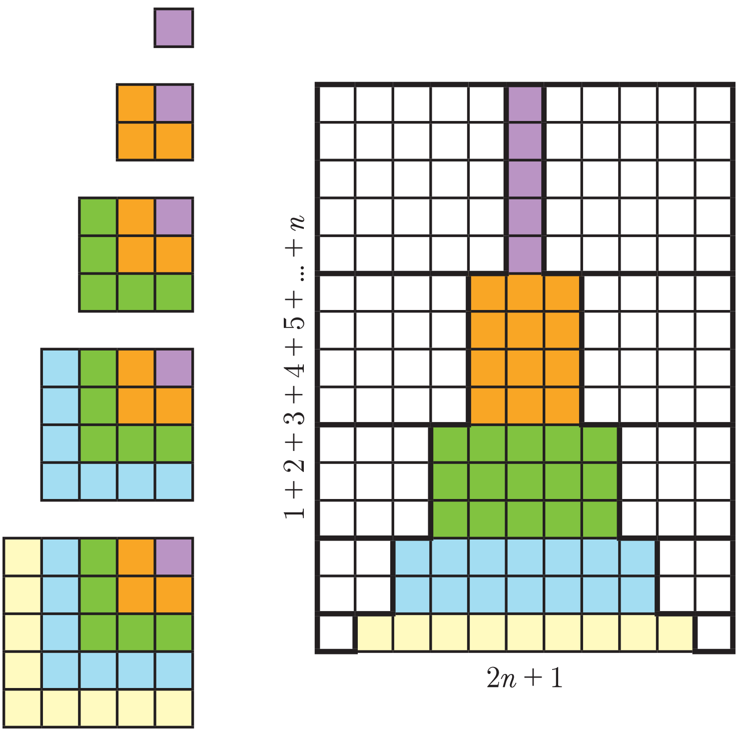
$$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$$

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + ... + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2$$

Hình 16.

TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG

Martin Gardner và Dan Kalman (độc lập nhau)



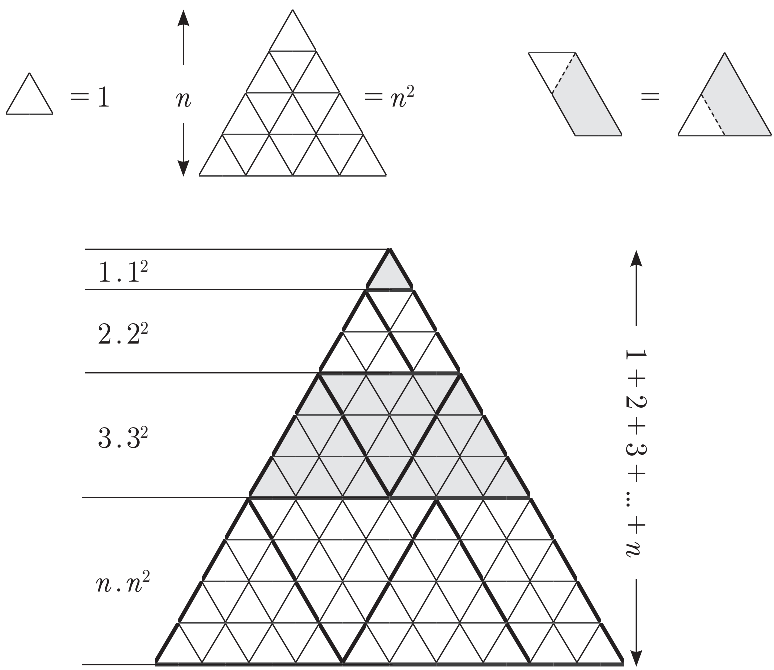
$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + n^2) = (2n + 1)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + n^2 = \frac{(2n + 1)n(n + 1)}{6}$$

Hình 17.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

Parames Laosinchai

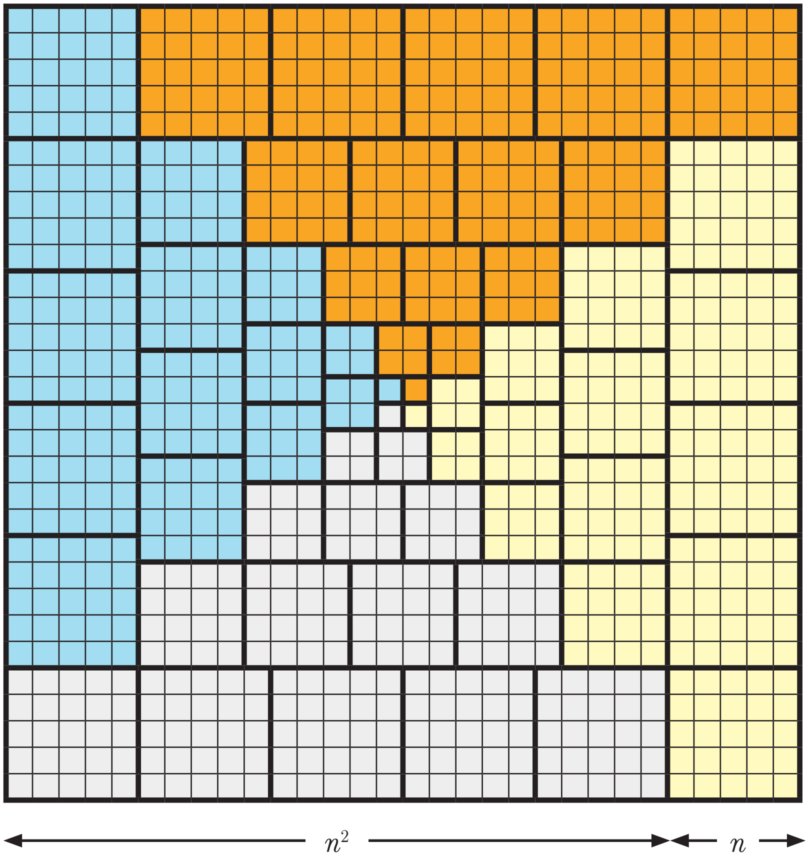


$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

Hình 18.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

Antonella Cupillari và Warren Lushbaugh (độc lập nhau)

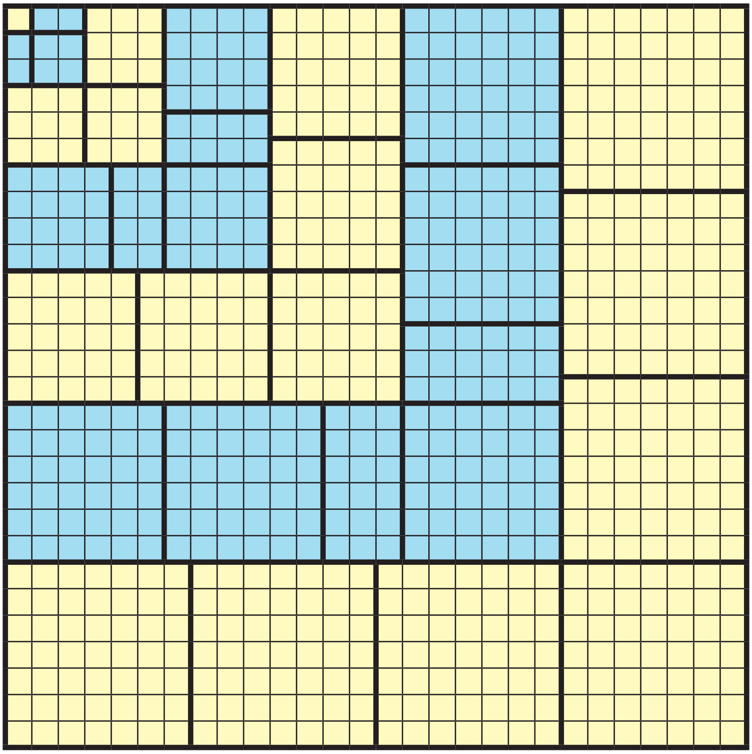


$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$

Hình 19.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

J. Barry Love

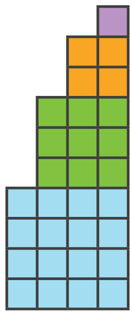


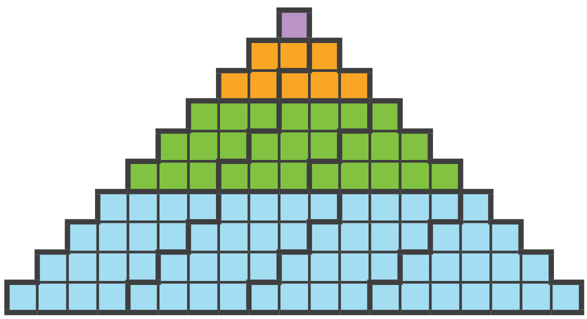
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2$$

Hình 20.

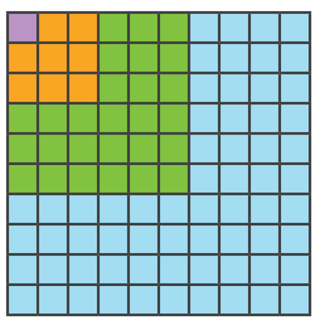
TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

#!





$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3$



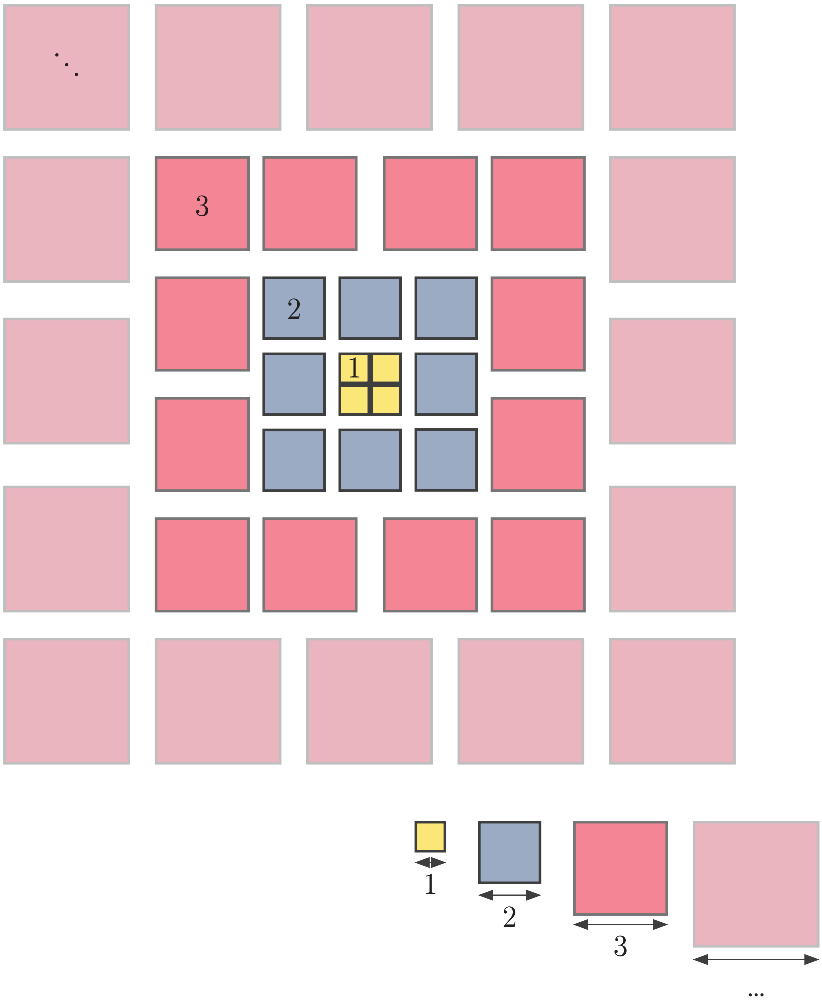
$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2$$

Hình 21.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

#!



$$4.1^2 + 8.2^2 + 12.3^2 + 16.4^2 + ... + 4n.n^2 = [n(n+1)]^2$$

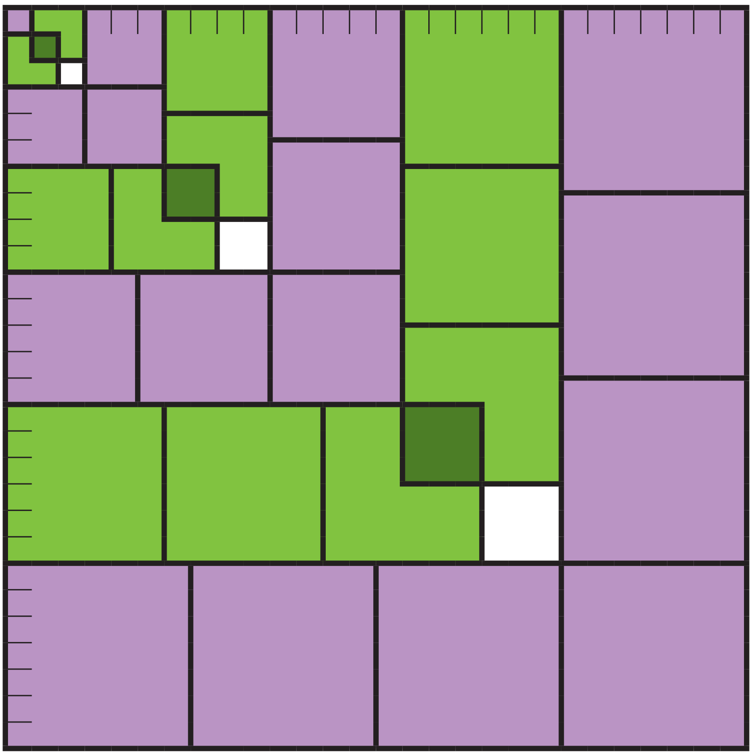
$$\Leftrightarrow 4.1^3 + 4.2^3 + 4.3^3 + 4.4^3 + ... + 4.n^3 = [n(n+1)]^2$$

$$\Leftrightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$

Hình 22.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

Solomon Golomb



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2$$

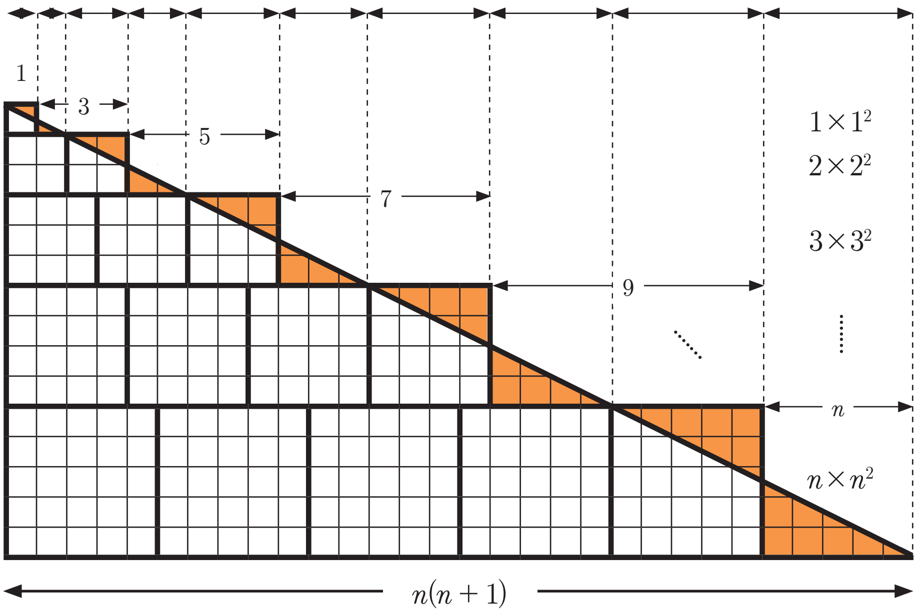
(Chú ý: Phần màu trắng là phần bị khuyết.)

Hình 23.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN, TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG VÀ TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

Georg Schrage

Đỗ Minh Triết



$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

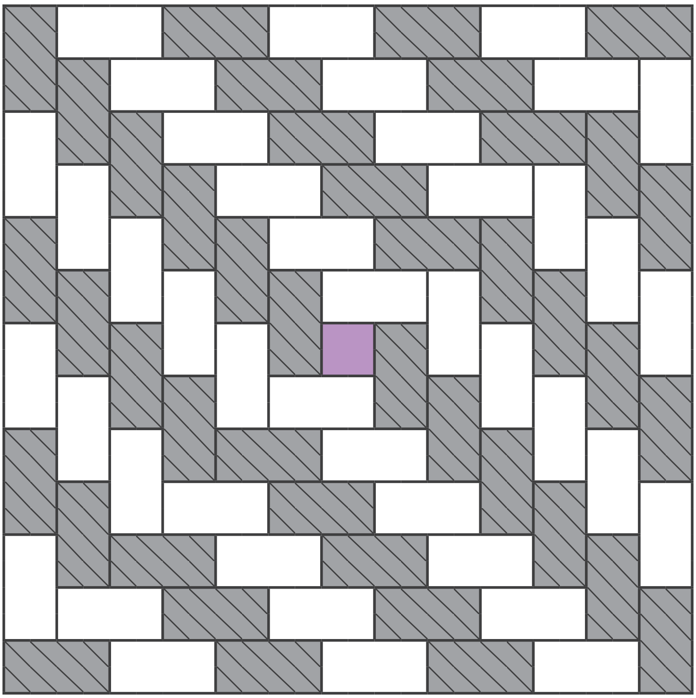
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Hình 24.

TÍNH TỔNG NHỜ NHỮNG QUÂN DOMINO

Shirley Wakin



$$1 + 2.4 + 2.8 + 2.12 + 2.16 + 2.20 + 2.24 = 13^2$$

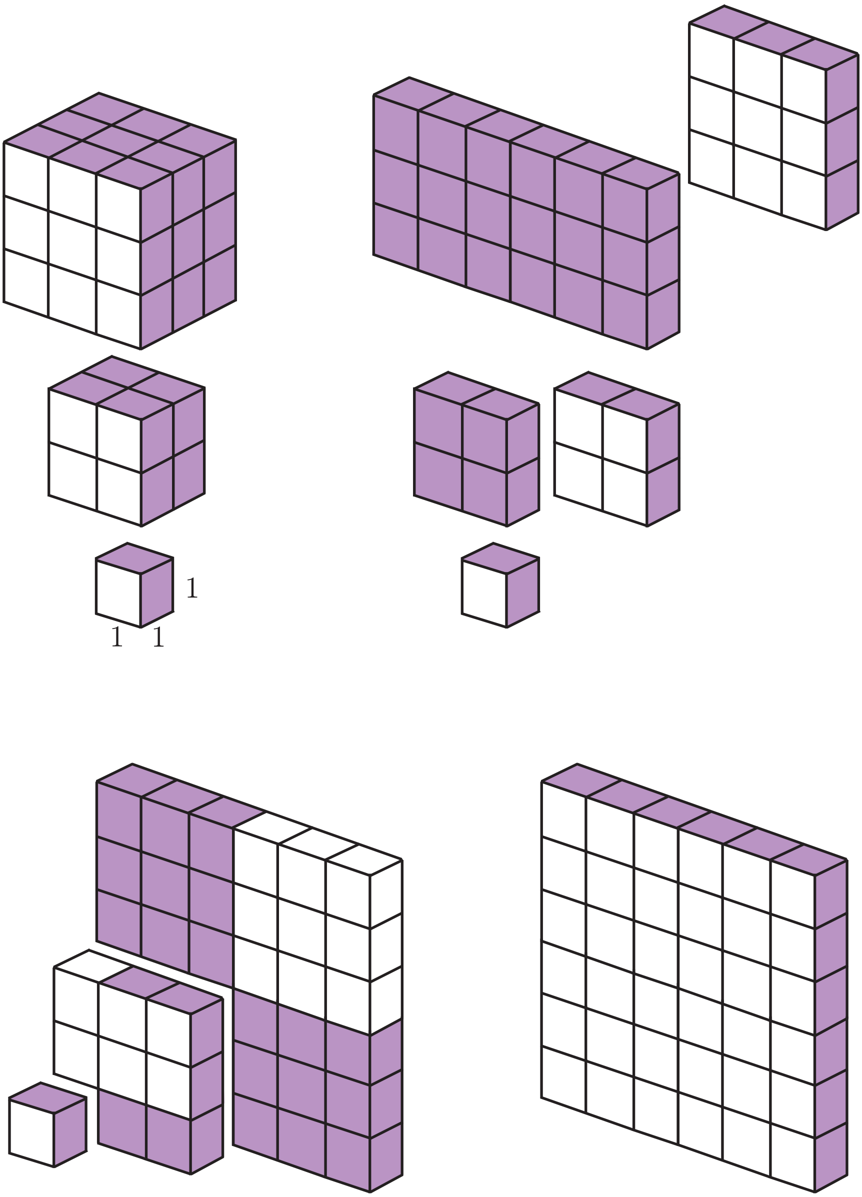
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} 4k = 1 + 2.4.1 + 2.4.2 + 2.4.3 + \ldots + 2.4n = (2n+1)^2$$

(Chú ý: Mỗi hình chữ nhật được xem là một quân domino, nó gồm hai hình vuông, hình vuông ở vị trí trung tâm đại diện cho số 1)

Hình 25.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

Alan Fry

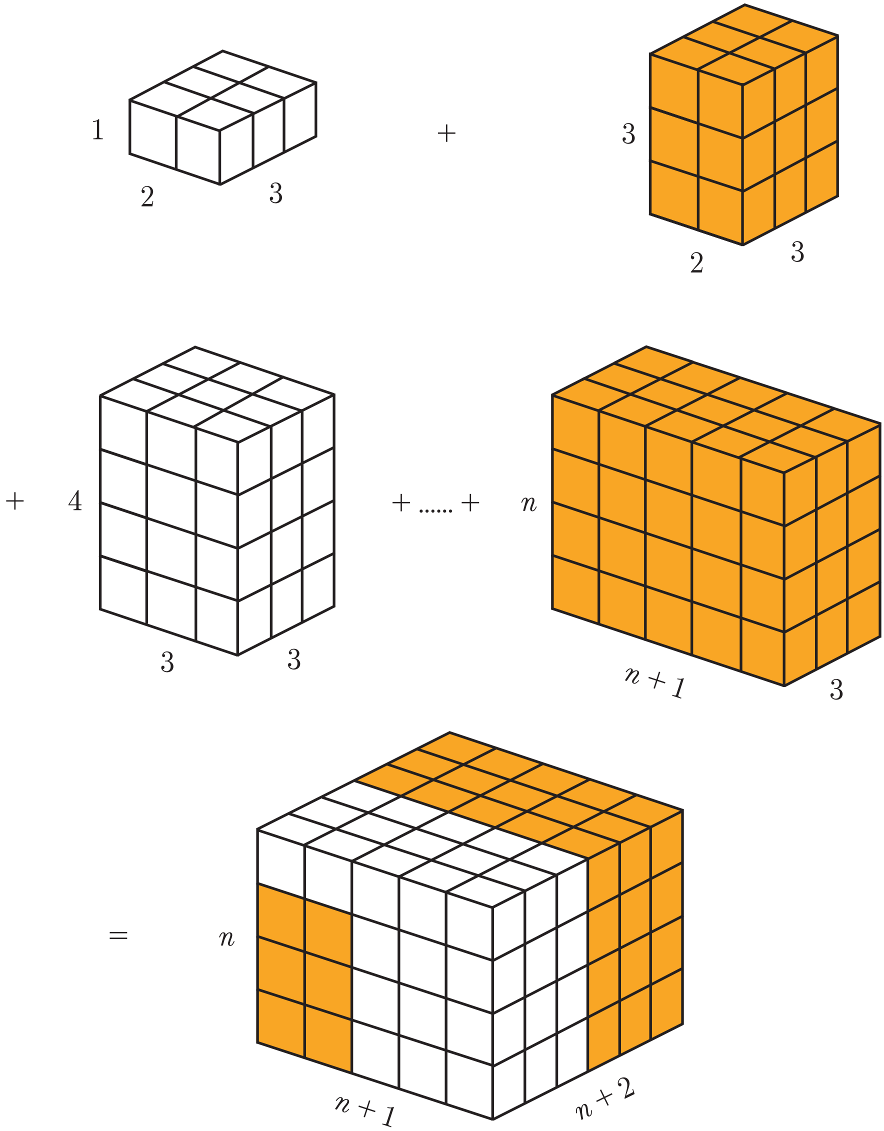


$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n)^2$$

Hình 26.

TỔNG LIÊN TIẾP CÁC TÍCH HAI SỐ LIỀN NHAU

Sidney Kung



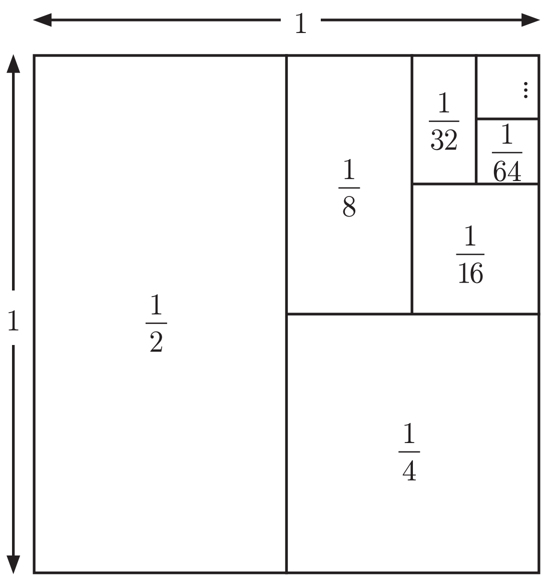
$$3\,[1\,.\,2 + 2\,.\,3 + 3\,.\,4 + \ldots + n(n+1)] = n(n+1)(n+2)$$

Hình 27.

CÁC CHUỖI SỐ
(TỔNG VÔ HẠN)

CHUỖI (TỔNG VÔ HẠN): TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/2

Warren Page

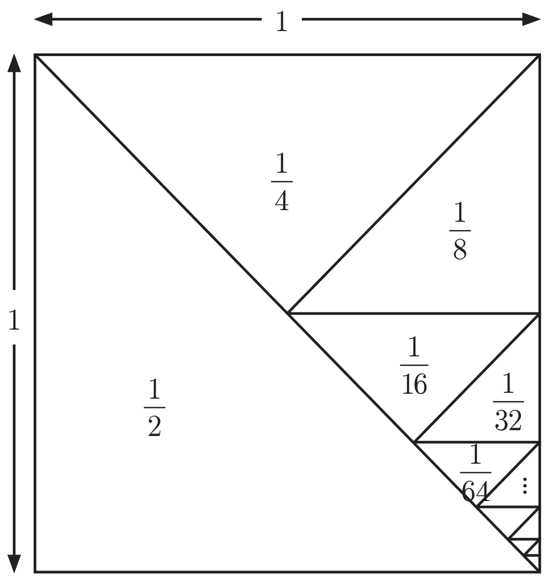


$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

Hình 28.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/2

Warren Page

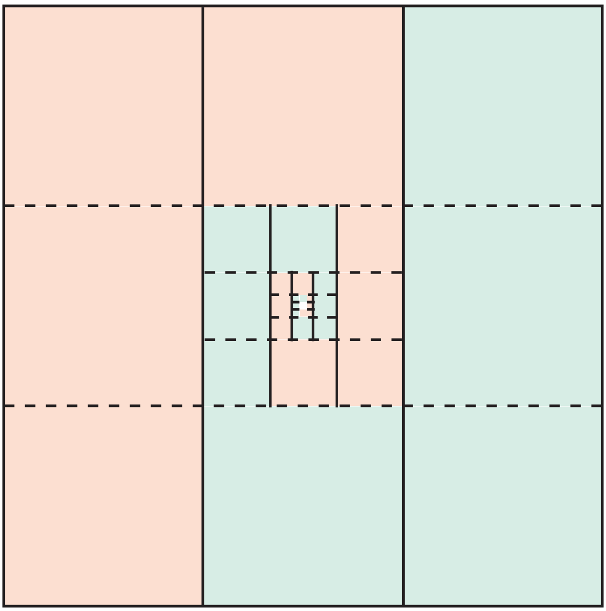


$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

Hình 29.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/3

Rick Mabry

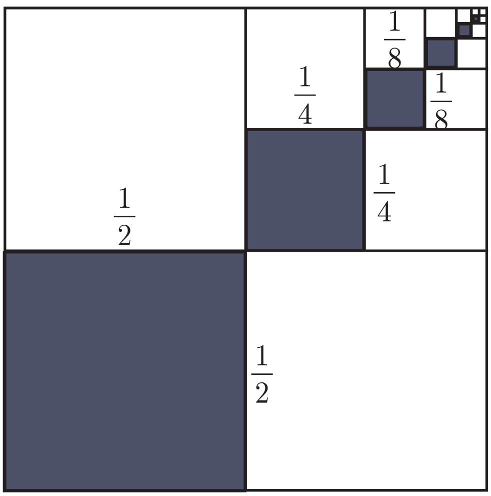


$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{1}{2}$$

Hình 30.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/4

Sunday Ajose

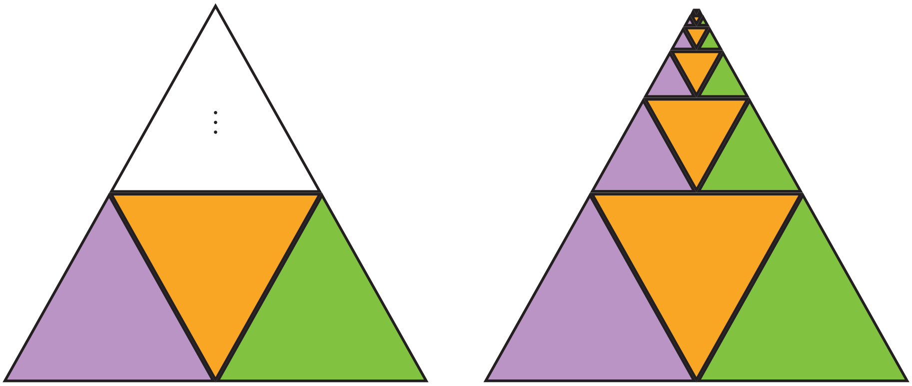


$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{1}{3}$$

Hình 31.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/4

Rick Mabry

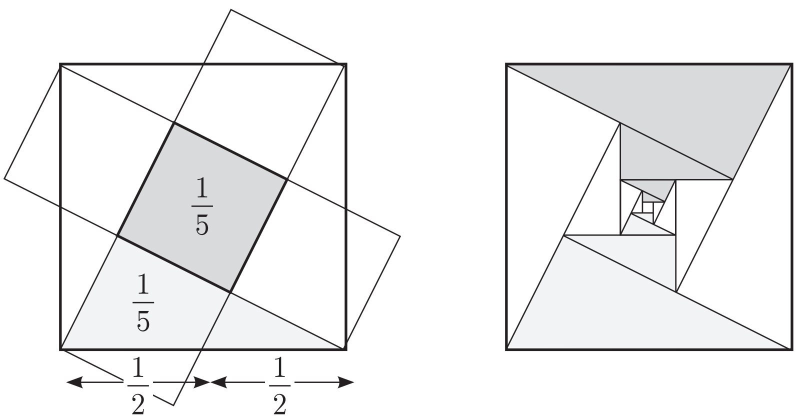


$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{1}{3}$$

Hình 32.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/5

Rick Mabry

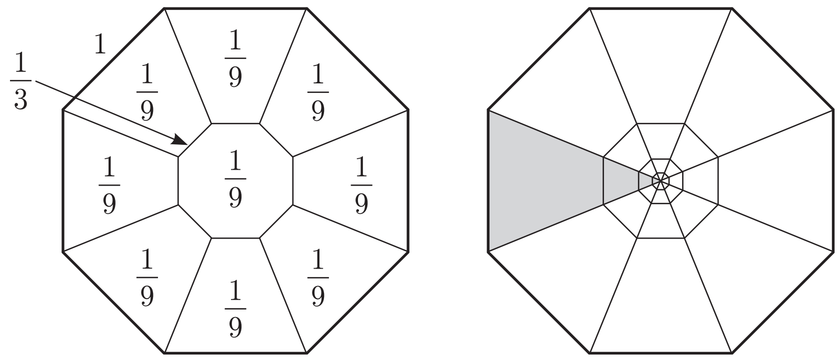


$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\ldots=\frac{1}{4}$$

Hình 33.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/9

James Tanton



$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}+\ldots=\frac{1}{8}$$

Kết quả tổng quát:

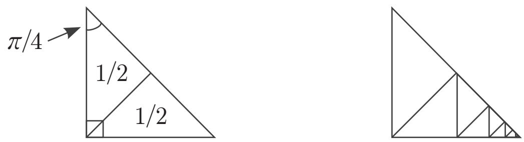
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{1}{n-1}$$

có thể được chứng minh một cách tương tự với $(n-1)$*-giác đều (đa giác* $n-1$ *cạnh bằng nhau), thậm chí là đường tròn.*

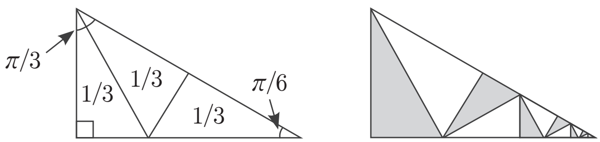
Hình 34.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/2, 1/3, 1/4, 1/5

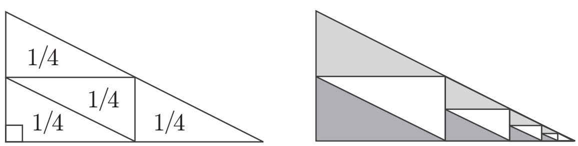
Roger Nelsen



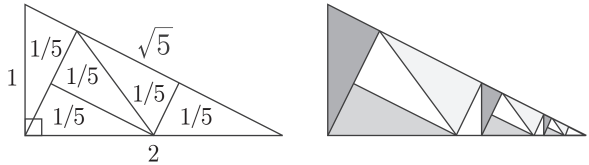
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=1$$



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{1}{3}$$



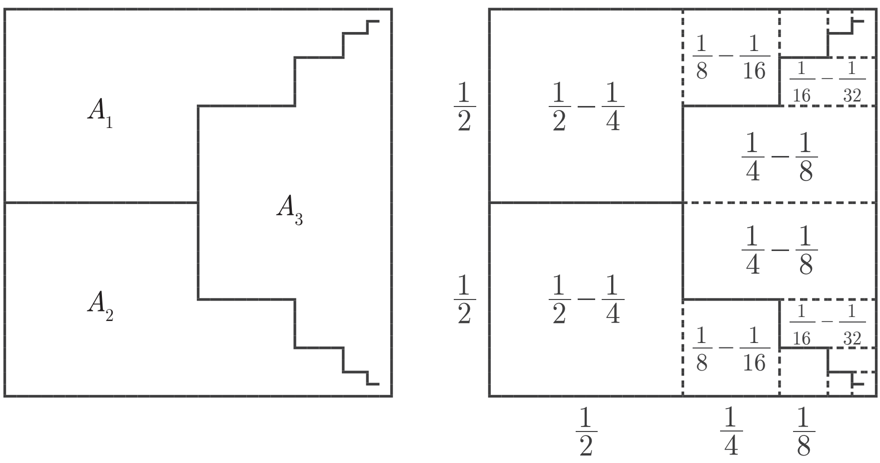
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\ldots=\frac{1}{4}$$

Hình 35.

CHUỖI ĐAN DẤU

James Chilaka

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$$



$$A_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots$$

$$A_1=A_2=A_3$$

$$A_1+A_2+A_3=1$$

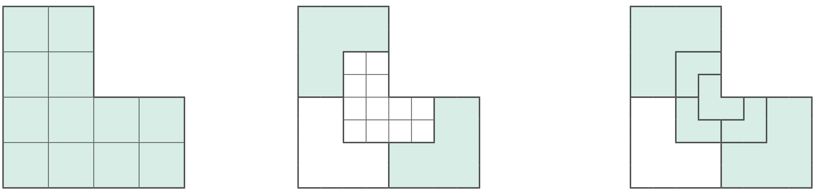
$$A_1=\frac{1}{3}$$

Hình 36.

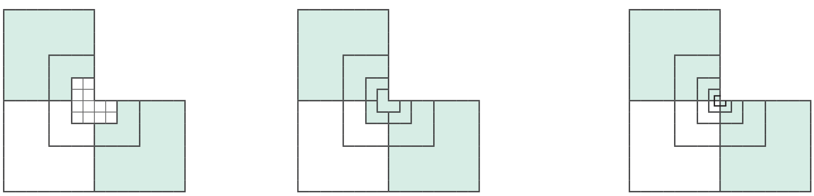
CHUỖI ĐAN DẤU 1/2

Roger Nelsen

1 $\qquad 1-\frac{1}{2}$ $\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$



$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ $\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ $\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots$



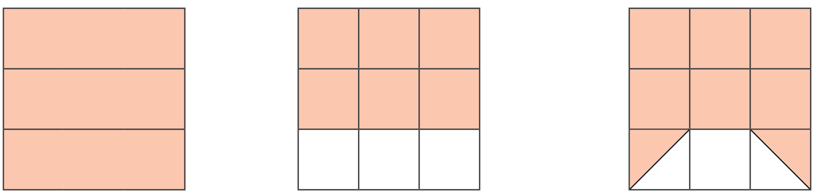
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots=\frac{2}{3}$$

Hình 37.

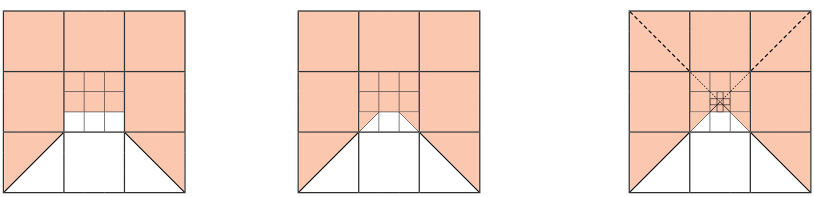
CHUỖI ĐAN DẤU 1/3

Hasan Unal

1 $\qquad$ $1-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$



$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}$ $\qquad$ $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ $\qquad$ $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-...$

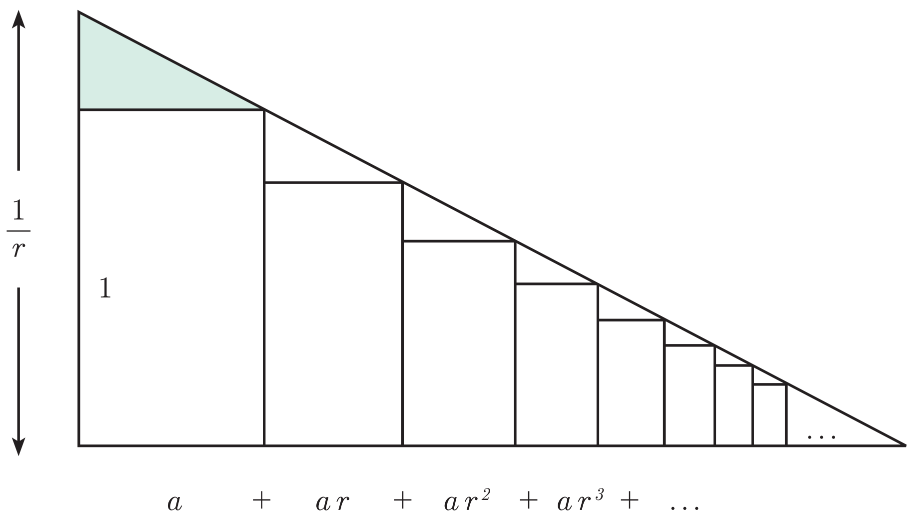


$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-...=\frac{3}{4}$$

Hình 38.

CHUỖI: TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

J. H. Webb



$$a > 0,\ 0 < r < 1$$

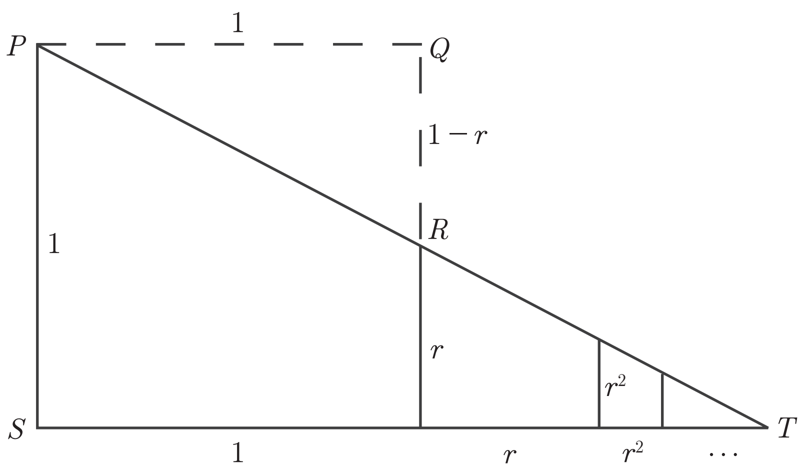
$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + ...}{\frac{1}{r}} = \frac{a}{\frac{1}{r} - 1}$$

$$\Leftrightarrow a + ar + ar^2 + ar^3 + ... = \frac{a}{1 - r}$$

Hình 39.

CHUỖI: TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Benjamin Klein và Irl Bivens



$$0 < r < 1$$

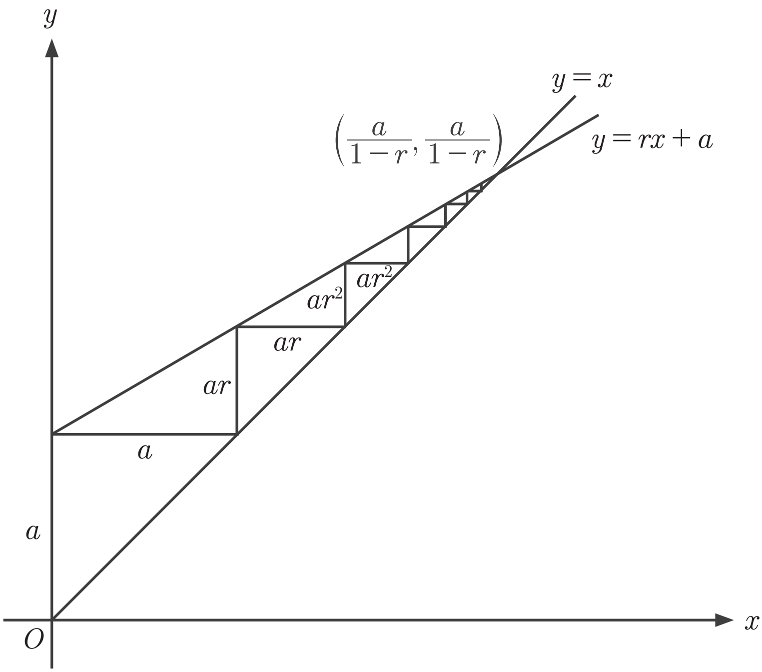
$$\triangle PQR \sim \triangle TSP$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1-r}$$

Hình 40.

CHUỖI: TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

The Viewpoints 2000 Group



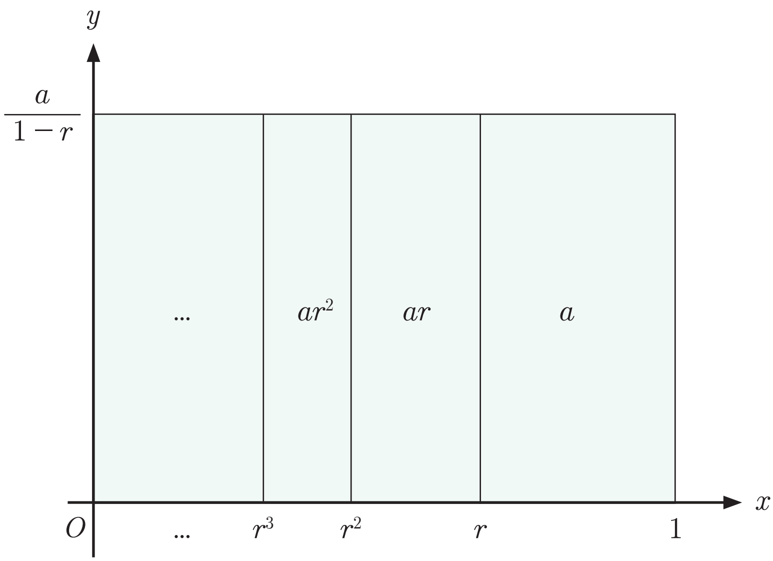
$$a > 0,\ 0 < r < 1$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

Hình 41.

CHUỖI: TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Craig Johnson & Carlos Spaht (độc lập nhau)



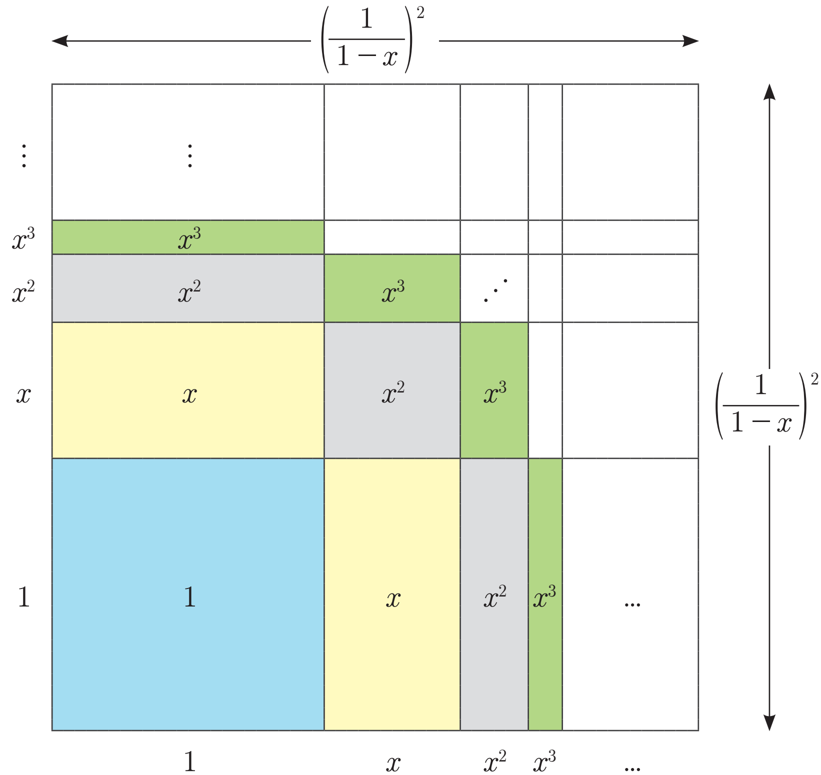
$$a > 0,\ 0 < r < 1$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

Hình 42.

CHUỖI LUỸ THỪA

Roger Nelsen



$$x \in [0, 1)$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + ...)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

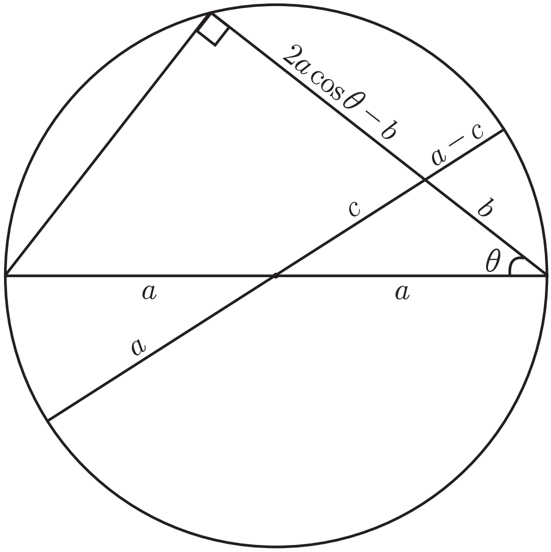
(Sử dụng kết quả từ "Hình 40." trang 63)

Hình 43.

CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

LUẬT COSIN

Sidney Kung



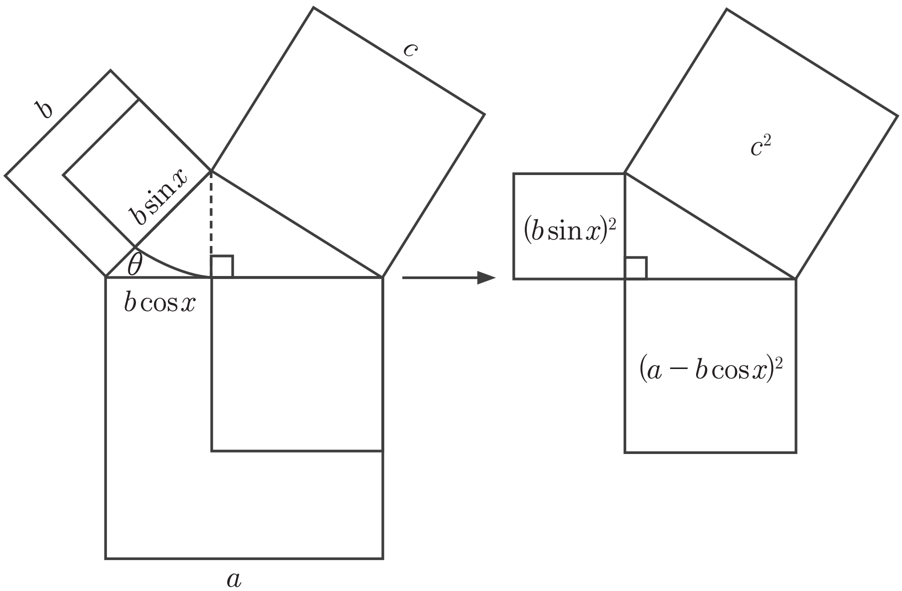
$$(2a\cos\theta - b)\,b = (a-c)(a+c)$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Hình 44.

LUẬT COSIN

Timothy Sipka

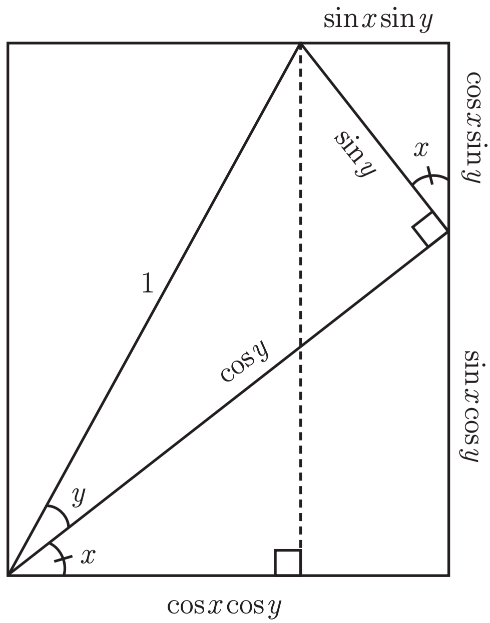


$$c^2 = (b\sin x)^2 + (a - b\cos x)^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos x$$

Hình 45.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN TỔNG, COS TỔNG

Roger Nelsen



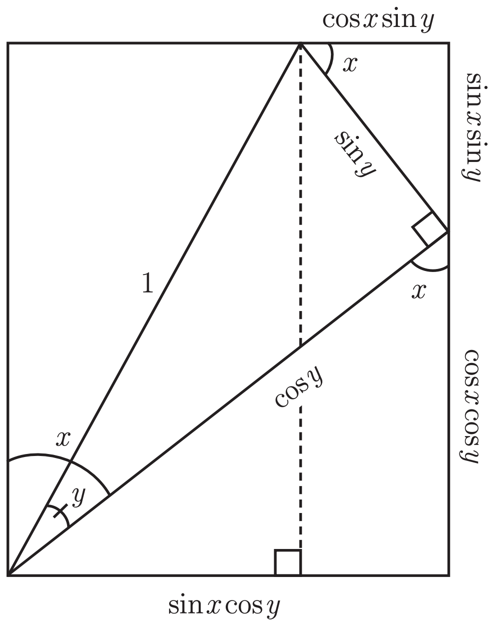
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Hình 46.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN HIỆU, COS HIỆU

Roger Nelsen



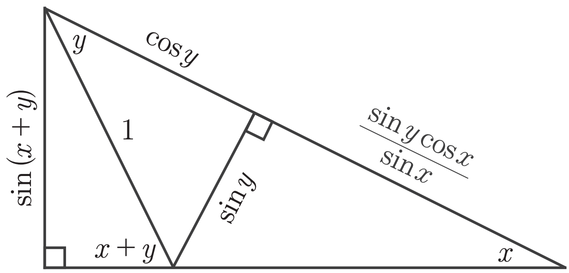
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Hình 47.

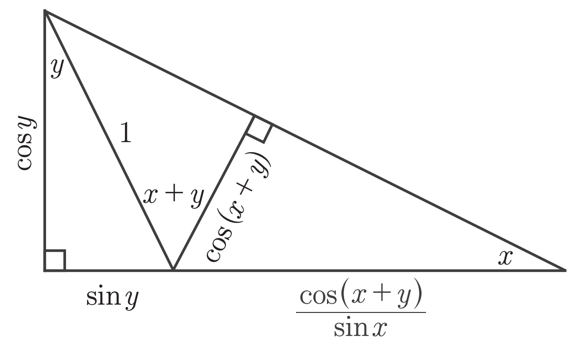
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN TỔNG, COS TỔNG

Leonard Smiley



$$\sin x = \frac{\sin(x+y)}{\cos y + \frac{\sin y \cos x}{\sin x}}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$



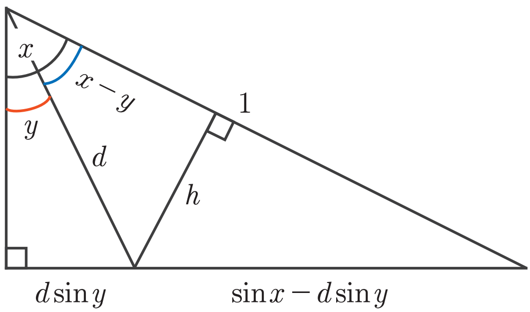
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos y}{\sin y + \frac{\cos(x+y)}{\sin x}}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Hình 48.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN HIỆU, COS HIỆU

Leonard Smiley

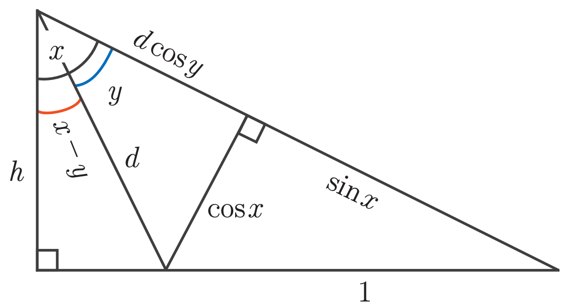


$d = \frac{\cos x}{\cos y}$

$h = d \sin(x - y)$

$h = (\sin x - d \sin y) \cos x$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$



$d = \frac{\cos x}{\sin y}$

$h = d \cos(x - y)$

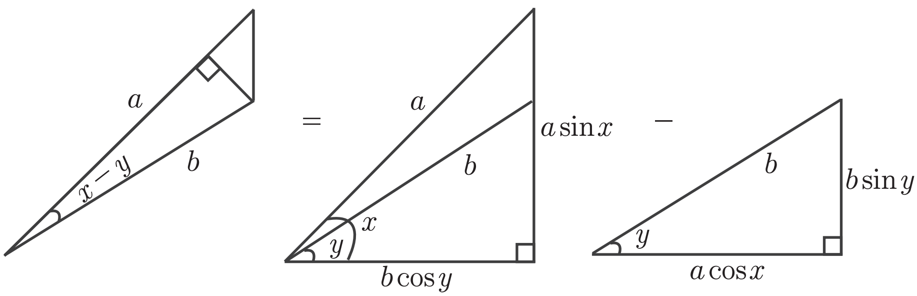
$h = (\sin x + d \cos y) \cos x$

$\sin(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

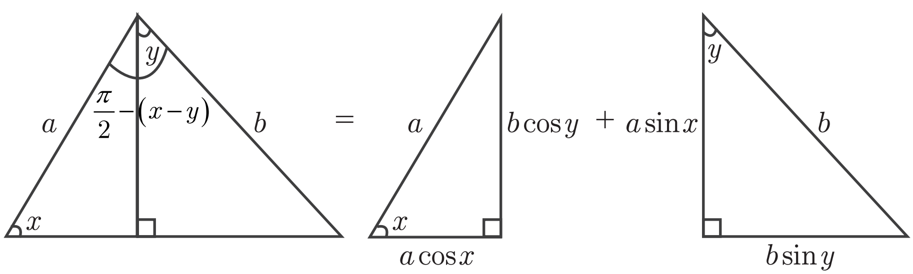
Hình 49.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN HIỆU, COS HIỆU

Sidney Kung



$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$



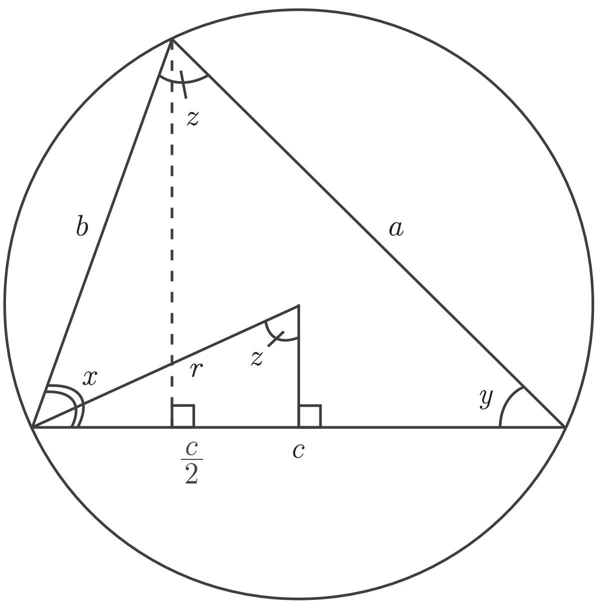
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

Hình 50.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN TỔNG

Sidney Kung

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ với } x + y < \pi$$



$$c = a\cos y + b\cos x$$

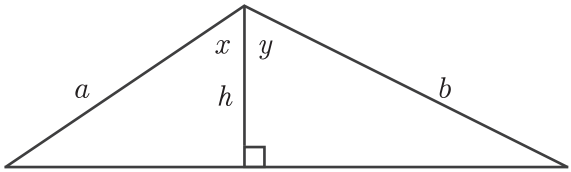
$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin z = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{1}{2}} = c,\ \sin x = a,\ \ \sin y = b$$

$$\sin(x+y) = \sin[\pi - (x+y)] = \sin z = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

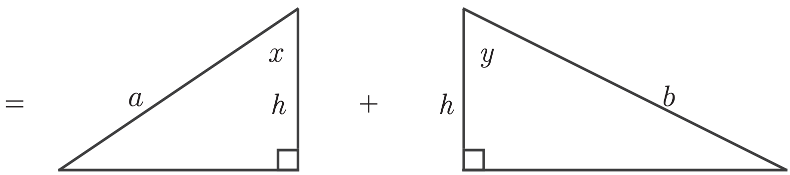
Hình 51.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN TỔNG

Christopher Brueningsen



$$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow h = a\cos x = b\cos y$$



$$\frac{1}{2}ab\sin(x+y)$$

$$= \frac{1}{2}ah\sin x + \frac{1}{2}bh\sin y$$

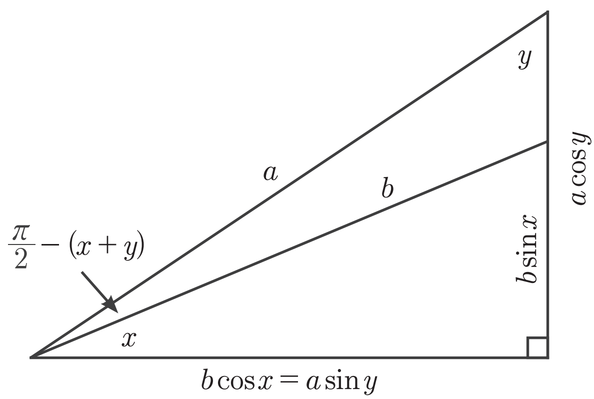
$$= \frac{1}{2}a(b\cos y)\sin x + \frac{1}{2}b(a\cos x)\sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

Hình 52.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC COS TỔNG

Sidney Kung



$$\frac{1}{2}ab\sin\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right]$$

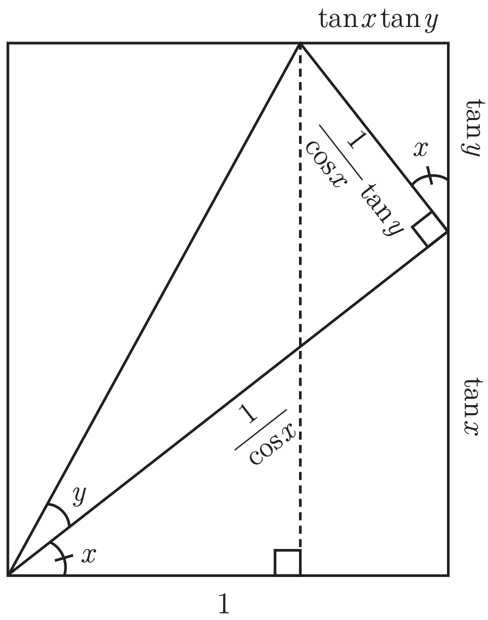
$$= \frac{1}{2}b\cos x\, a\cos y - \frac{1}{2}a\sin y\, b\sin x$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

Hình 53.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN TỔNG

Roger Nelsen

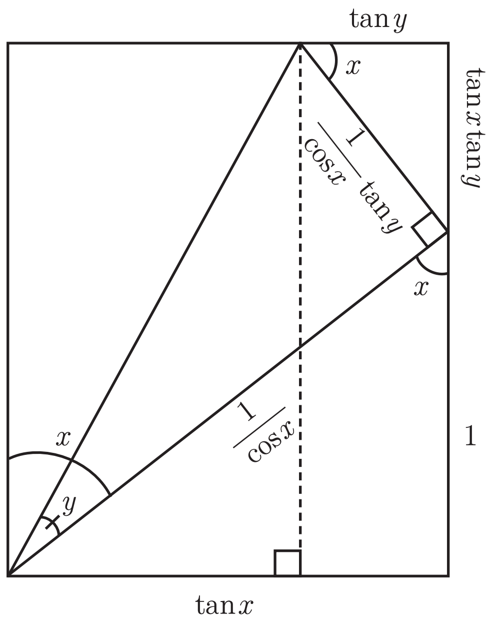


$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Hình 54.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN HIỆU

Roger Nelsen

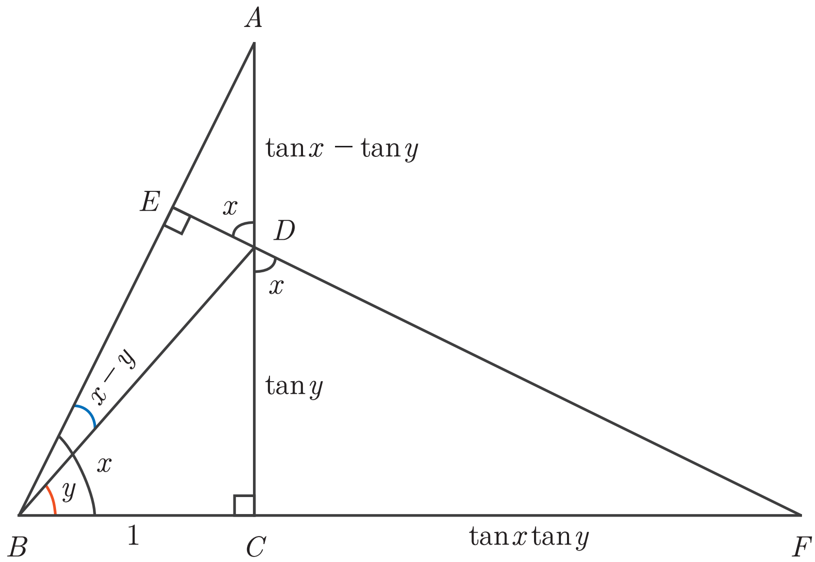


$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Hình 55.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN HIỆU

Guanshen Ren



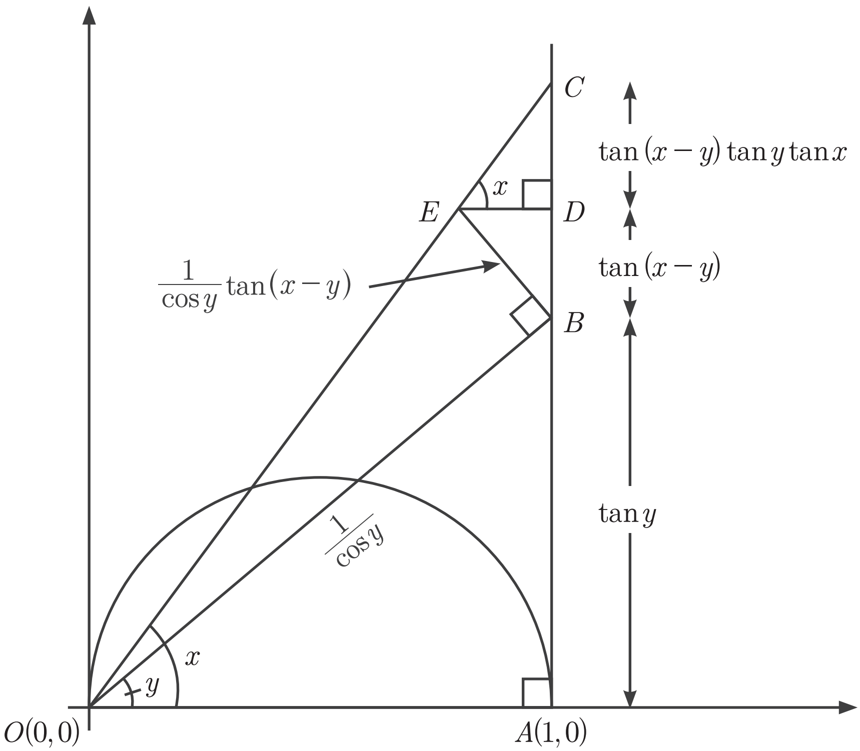
$$\frac{BF}{BE} = \frac{AD}{DE}$$

$$\tan(x-y) = \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BF} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Hình 56.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN HIỆU

Fukuzo Suzuki



$$AC - AB = BD + DC$$

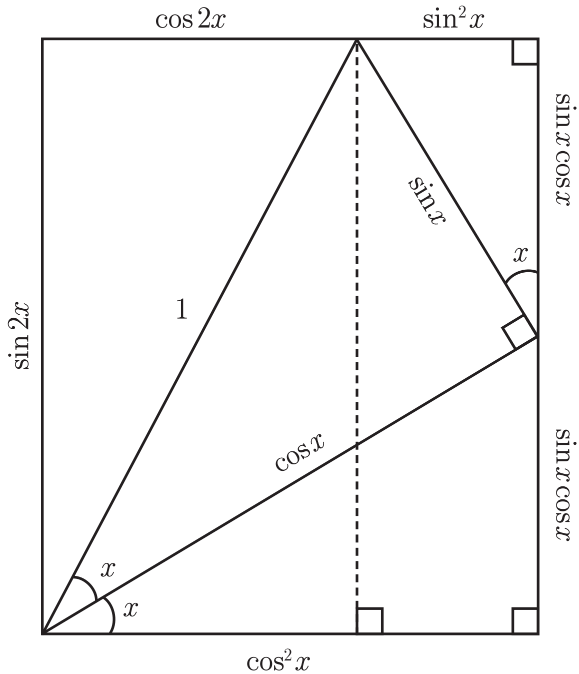
$$\tan x - \tan y = \tan(x-y) + \tan x \tan y \tan(x-y)$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Hình 57.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN ĐÔI

Hasan Unal



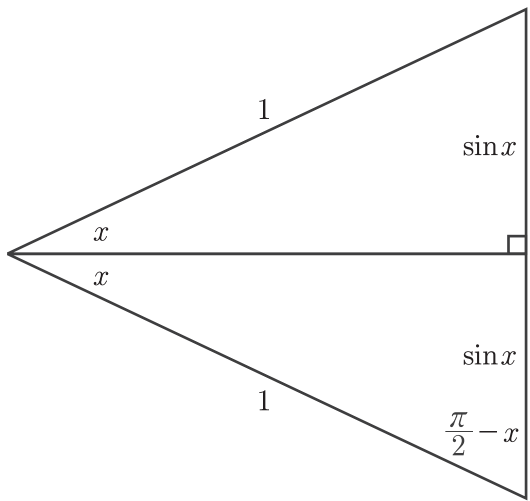
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Hình 58.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN ĐÔI

Sidney Kung



$$\frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

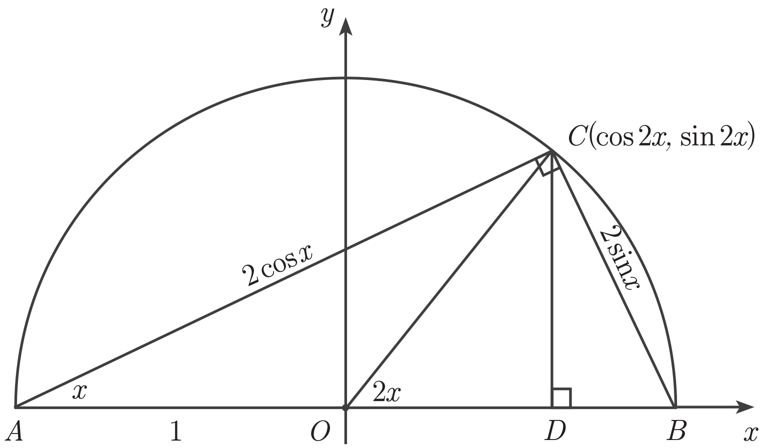
$$(2\sin x)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Hình 59.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN ĐÔI

Roger Nelsen



$$A = x$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB} \qquad \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

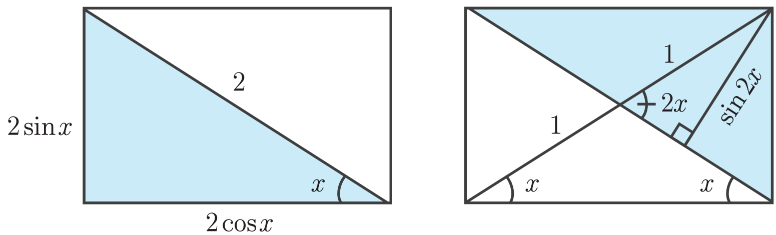
$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2\cos x} = \frac{2\sin x}{2} \qquad \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{2\cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \Leftrightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

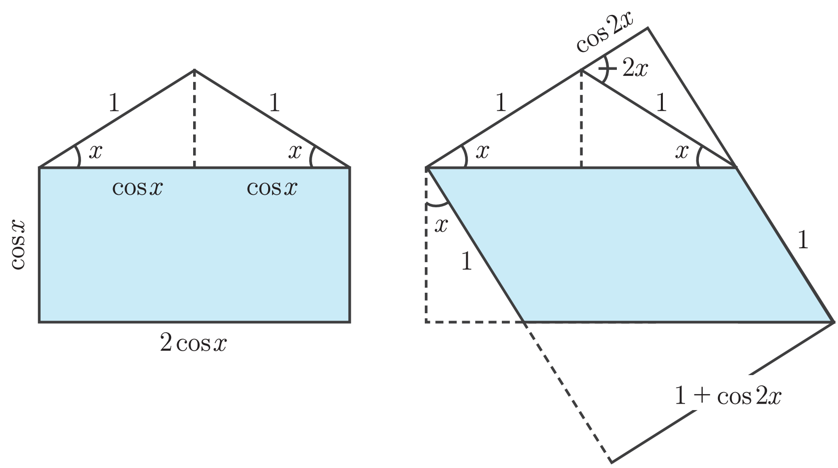
Hình 60.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN ĐÔI

Yihnan David Gau



$$2\sin x\cos x = \sin 2x$$

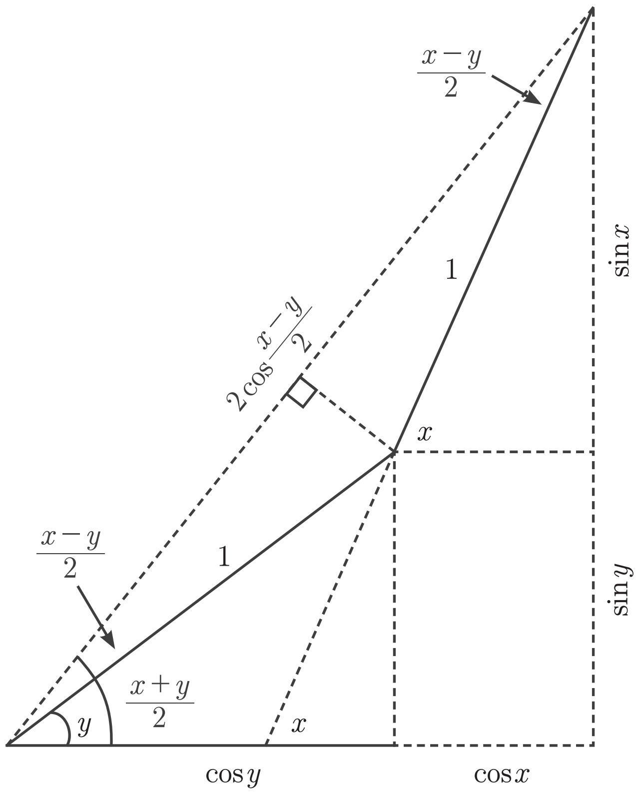


$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

Hình 61.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CỘNG SIN, CỘNG COS

Yukio Kobayashi

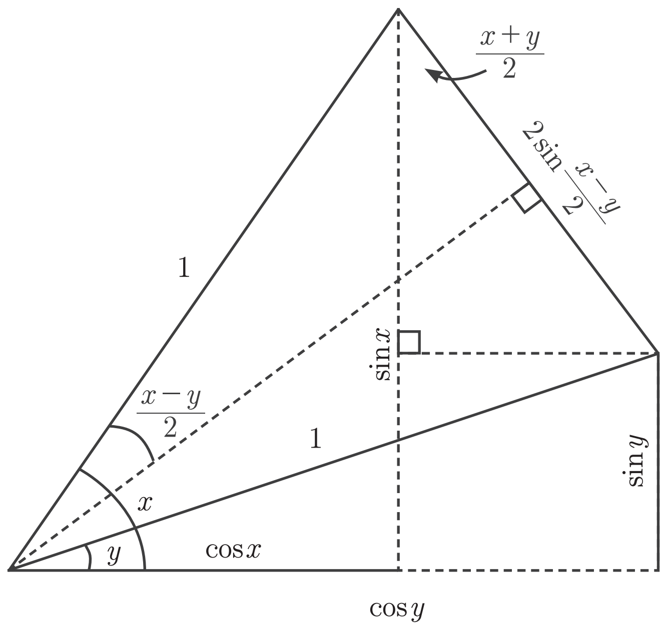


$$\sin x + \sin y = 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Hình 62.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRỪ SIN, TRỪ COS

Yukio Kobayashi

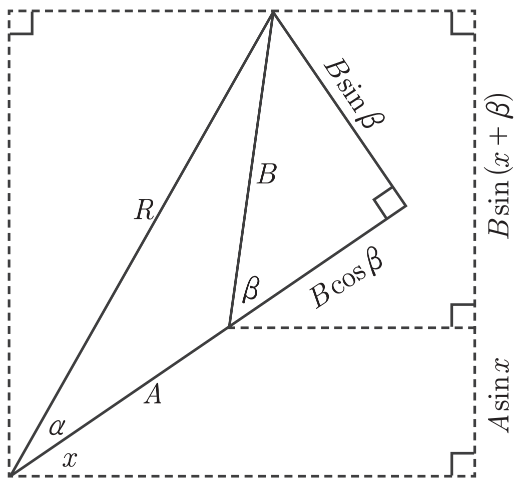


$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

Hình 63.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TỔNG SIN COS

Rick Mabry & Paul Deiermann



$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\beta},\quad \tan\alpha=\frac{B\sin\beta}{A+B\cos\beta}$$

$$A\sin x+B\sin(x+\beta)=R\sin(x+\alpha)$$

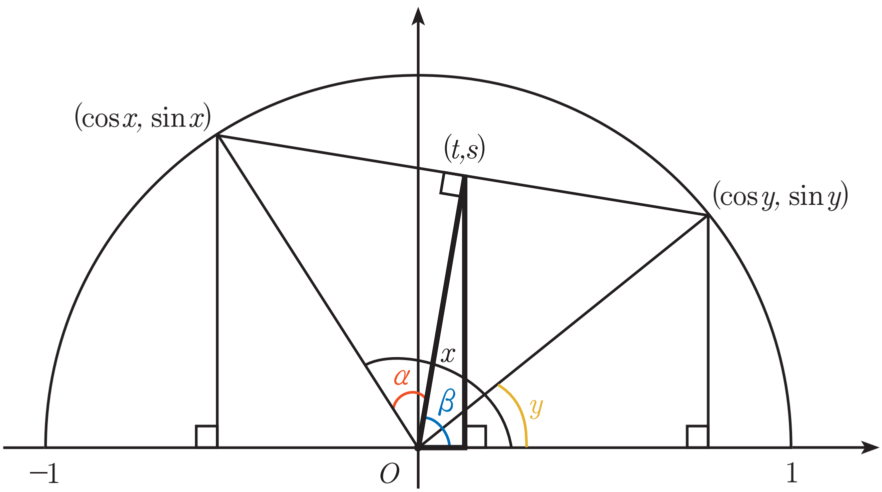
$$\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{B}{A}$$

$$\Rightarrow A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha)$$

Hình 64.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CỘNG SIN, CỘNG COS

Sidney Kung



$$\alpha = \frac{x-y}{2},\ \beta = \frac{x+y}{2}$$

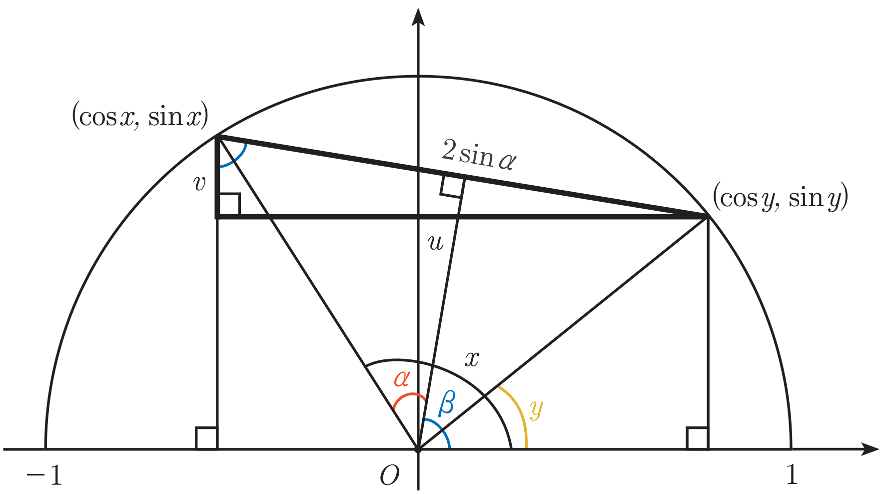
$$\begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin y}{2} = s = \cos\alpha \sin\beta \\ \dfrac{\cos x + \cos y}{2} = t = \cos\alpha \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Hình 65.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRỪ SIN, TRỪ COS

Sidney Kung



$$\alpha = \frac{x-y}{2}, \beta = \frac{x+y}{2}$$

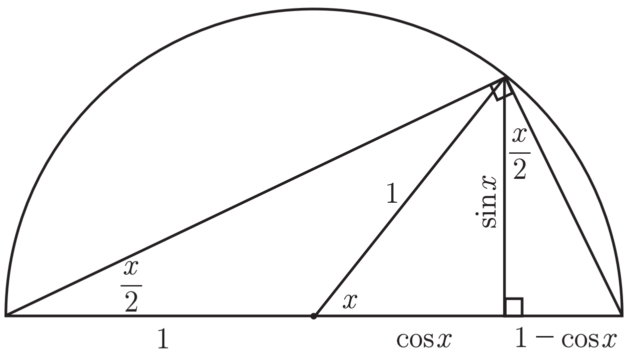
$$\begin{cases} \sin x - \sin y = v = 2\sin\alpha\cos\beta \\ \cos y - \cos x = u = 2\sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Hình 66.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN GÓC CHIA ĐÔI

R. J. Walker

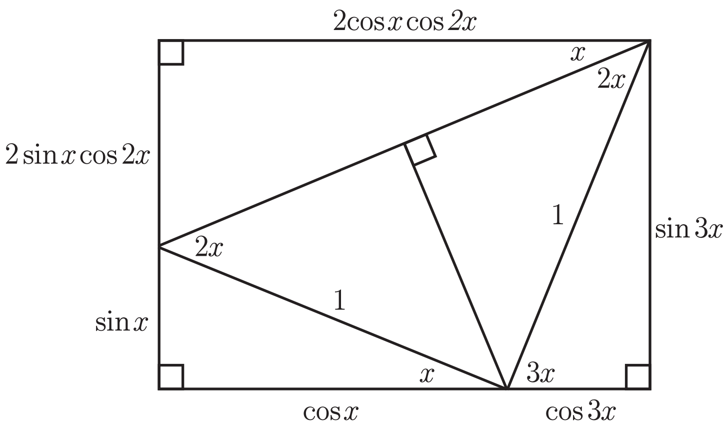


$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Hình 67.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN BA

Claudi Alsina & Roger Nelsen



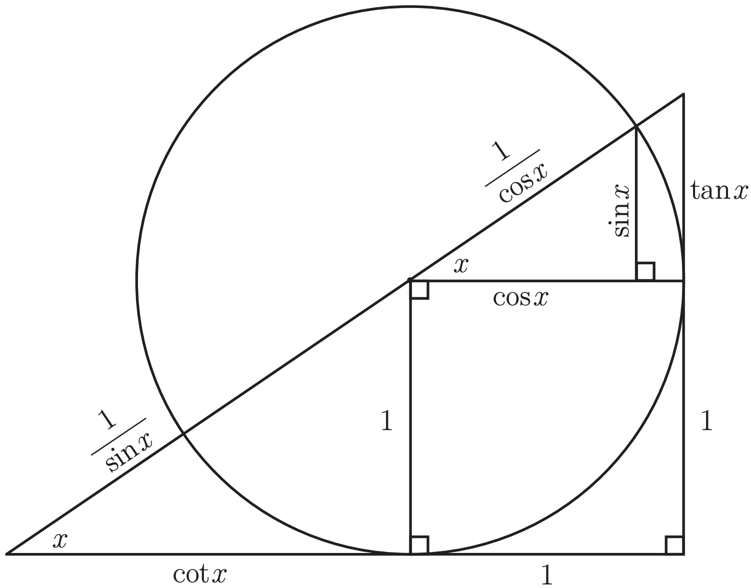
$$\begin{aligned}\sin 3x &= 2\sin x \cos 2x + \sin x\\ &= 2\sin x\,(1 - 2\sin^2 x) + \sin x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 2\cos x \cos 2x - \cos x\\ &= 2\cos x\,(2\cos^2 x - 1) - \cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Hình 68.

MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÁC

William Romaine



$$\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\tan x + 1}{\cot x + 1}$$

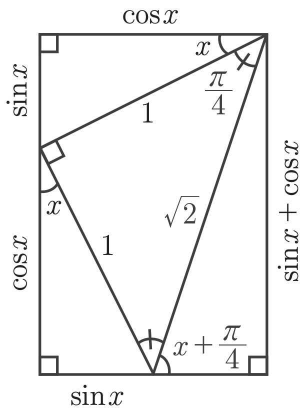
$$(\tan x + 1)^2 + (\cot x + 1)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right)^2$$

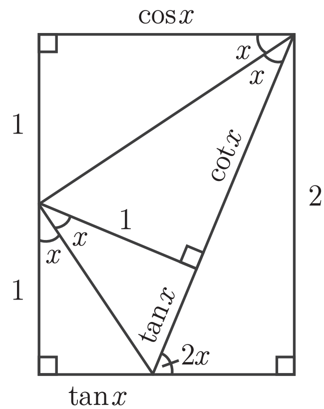
Hình 69.

MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

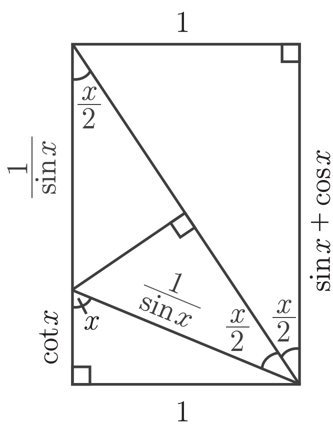
Roger Nelsen

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$





$$\frac{1}{\sin x} + \cot x = \cot\frac{x}{2}$$

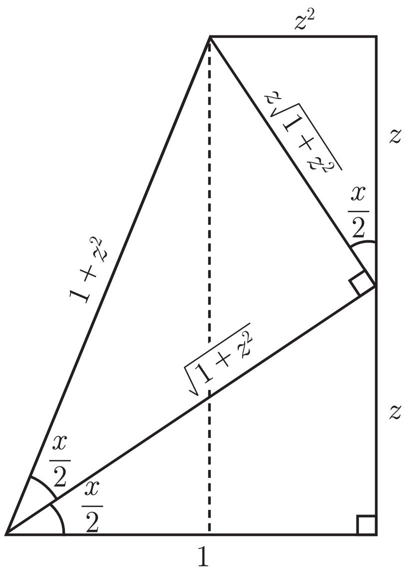


Hệ quả: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$.

Hình 70.

ĐẠI SỐ HOÁ HÀM LƯỢNG GIÁC

Sidney Kung



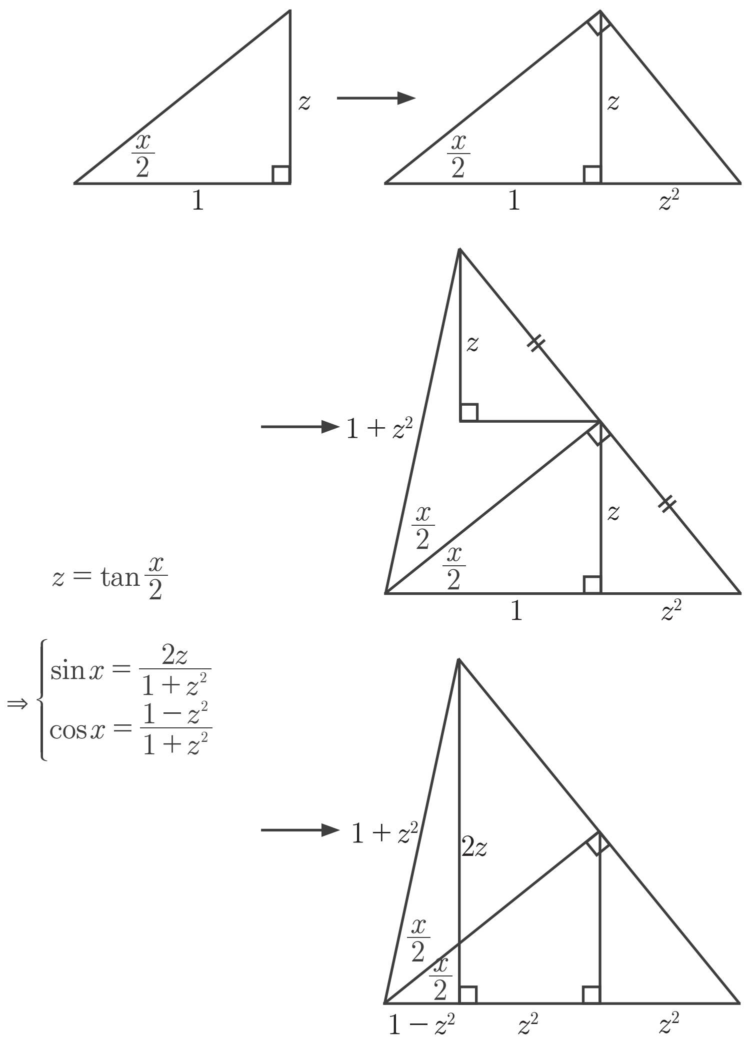
$$z = \tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2} \\ \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} \end{cases}$$

Hình 71.

ĐẠI SỐ HOÁ HÀM LƯỢNG GIÁC

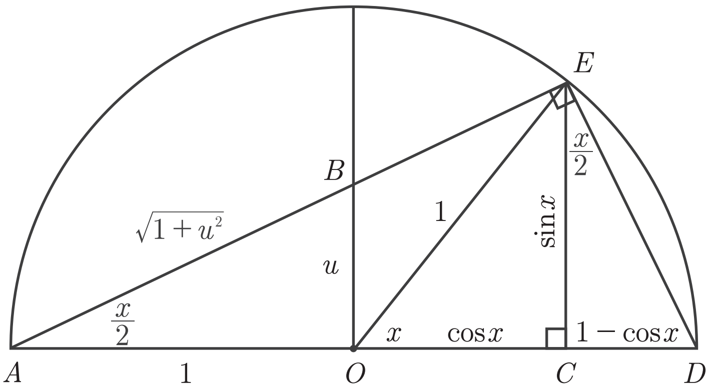
Roger Nelsen



Hình 72.

ĐẠI SỐ HOÁ HÀM LƯỢNG GIÁC

Paul Deiermann



$$u = \tan\frac{x}{2}, \quad DE = 2\sin\frac{x}{2} = \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\frac{CE}{DE} = \frac{OA}{BA} \Rightarrow \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

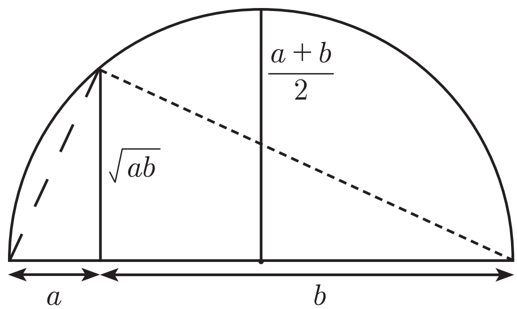
$$\frac{CD}{DE} = \frac{OB}{BA} \Rightarrow \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Hình 73.

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Charles Gallant



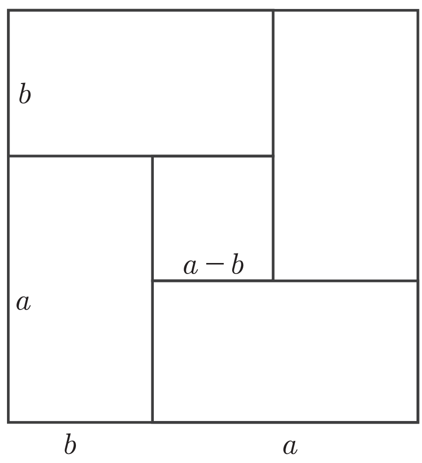
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$$

Hình 74.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Doris Schattschneider



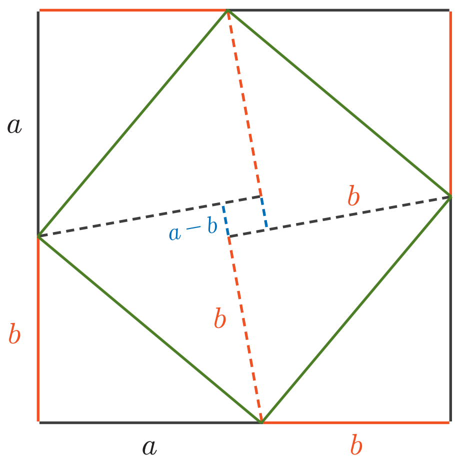
$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$
$$\Rightarrow \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow a=b$$

Hình 75.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Ayoub Ayoub



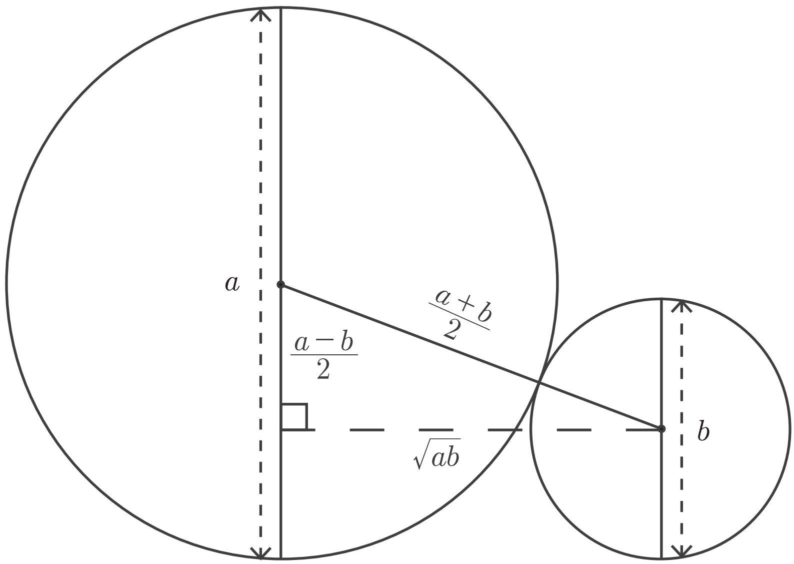
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$
$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$$

Hình 76.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Roland Eddy



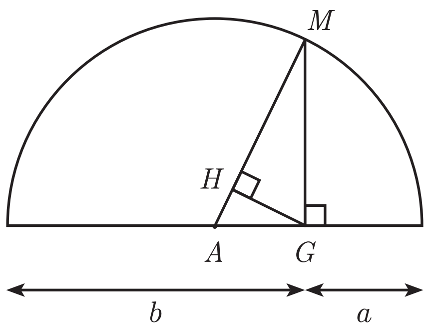
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$$

Hình 77.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM-HM

Pappus xứ Alexandria (khoảng 320)



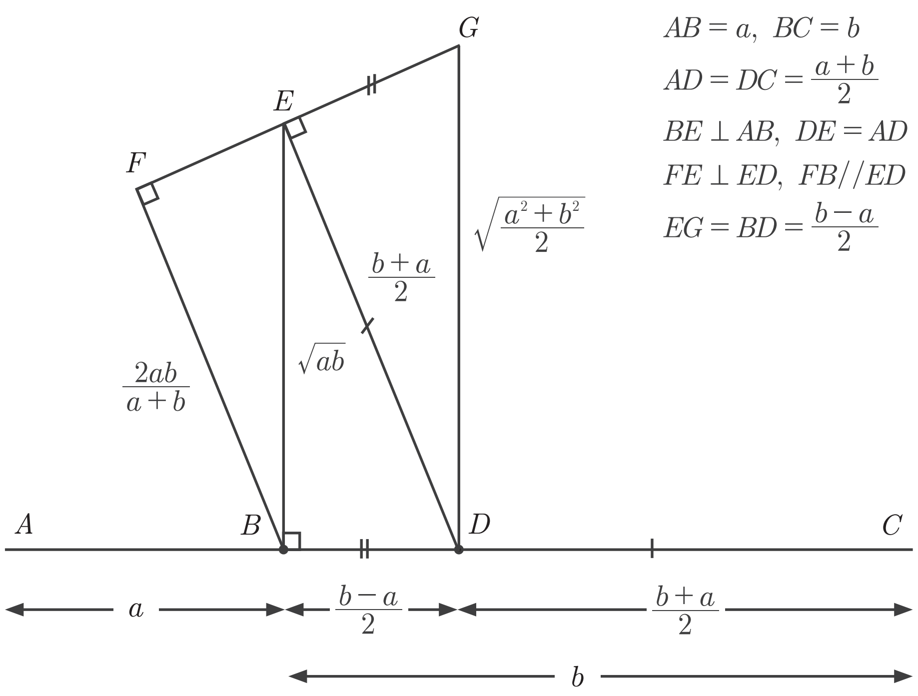
$$AM = \frac{a+b}{2} \qquad GM = \sqrt{ab} \qquad HM = \frac{2ab}{a+b}$$

$$AM \geq GM \geq HM$$

Hình 78.

BẤT ĐẲNG THỨC HM-GM-AM-RM

Sidney Kung



$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

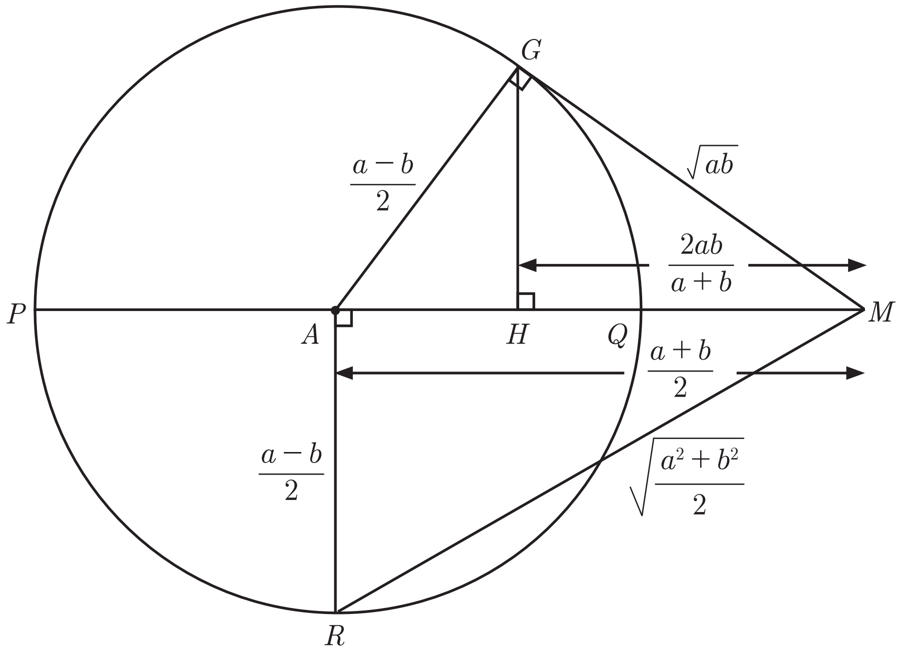
Hình 79.

BẤT ĐẲNG THỨC HM-GM-AM-RM

Roger Nelsen

$PM = a, QM = b, a > b > 0$

$HM < GM < AM < RM$

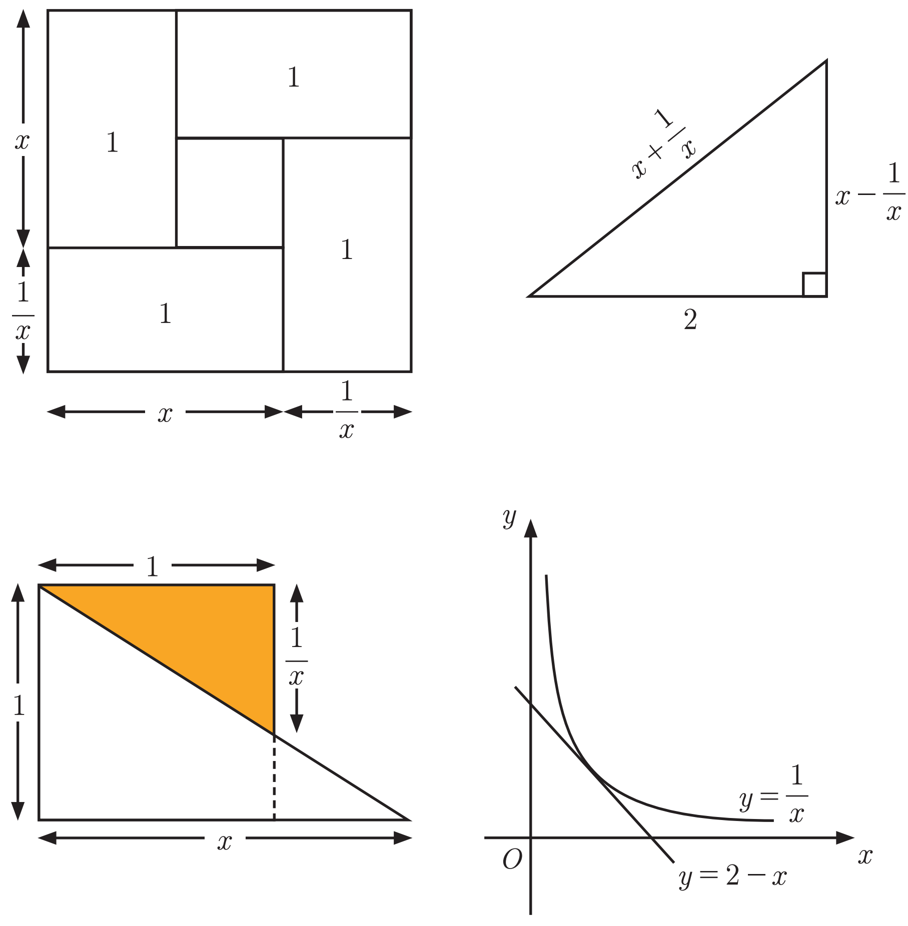


$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Hình 80.

BẤT ĐẲNG THỨC X + 1/X ≥ 2

Roger Nelsen



$$x \geq 1$$

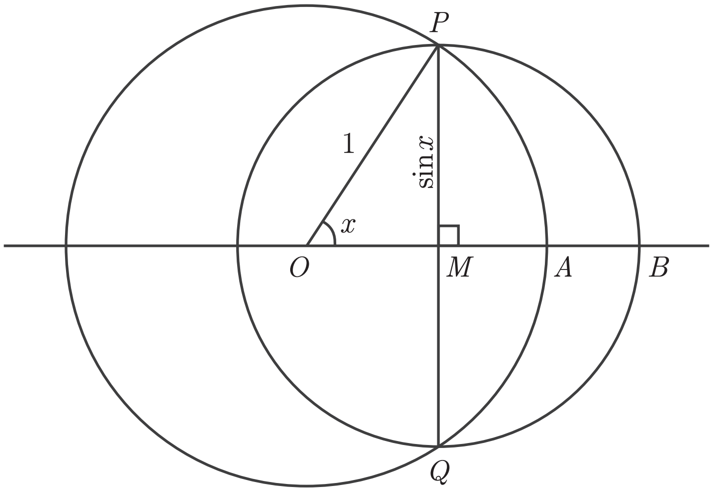
$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Hình 81.

BẤT ĐẲNG THỨC JORDAN

Feng Yuefeng

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$$



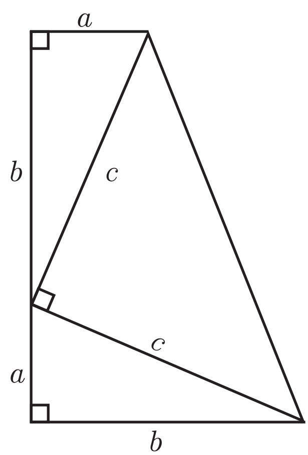
$$\begin{aligned} OB = OM + MP \geq OA &\Rightarrow \overparen{PBQ} \geq \overparen{PAQ} \geq PQ \\ &\Rightarrow \pi \sin x \geq 2x \geq 2 \sin x \\ &\Rightarrow \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x \end{aligned}$$

Hình 82.

CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS

James Garfield



$$2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

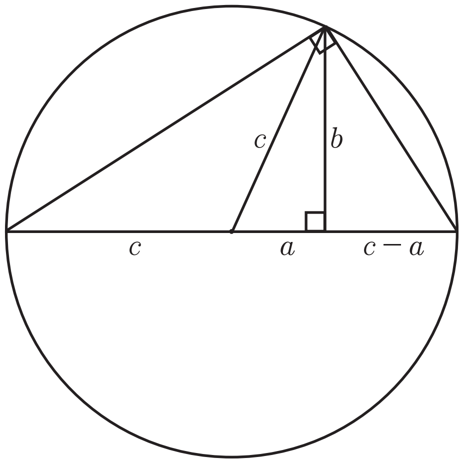
Phân tích.

Vế trái đẳng thức là tổng diện tích của ba hình tam giác vuông, còn vế phải lại là diện tích của cả hình thang. Biến đổi tương đương, ta được điều phải chứng minh. Tác giả của chứng minh không dùng lời này là James A. Garfield, công bố năm 1987 trên tạp chí New-England Journal of Education, Tổng thống thứ 20 của Hợp chủng quốc Hoa Kỳ. Đây là một trong các cách chứng minh định lý Pythagoras đơn giản mà tinh tế nhất.

Hình 83.

ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS

Michael Hardy



$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

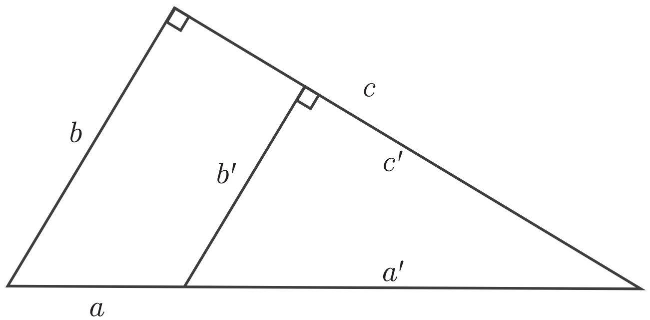
Phân tích.

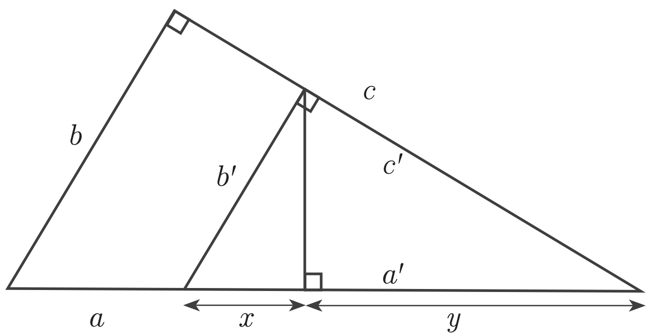
Sử dụng sự đồng dạng của hai tam giác, ta có ngay được một chứng minh đơn giản khác cho định lý Pythagoras.

Hình 84.

ĐỊNH LÍ PYTHAGORAS

Enzo Gentile



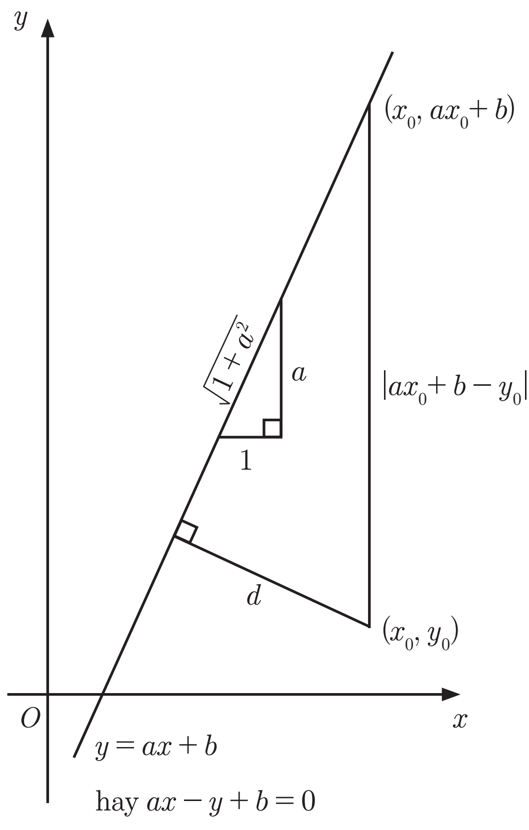


$$\frac{x}{b} = \frac{b'}{a} \Rightarrow ax = bb'$$
$$\frac{y}{c} = \frac{c'}{a} \Rightarrow ay = cc'$$
$$aa' = a(x + y) = bb' + cc'$$

Hình 85.

KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

R. L. Eisenman



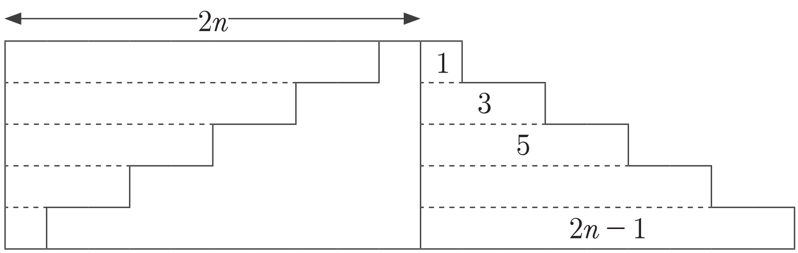
$$\frac{d}{1} = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Hình 86.

CÁC TÍNH CHẤT ĐẠI SỐ

TỈ LỆ GALILEO

Alfinio Flores

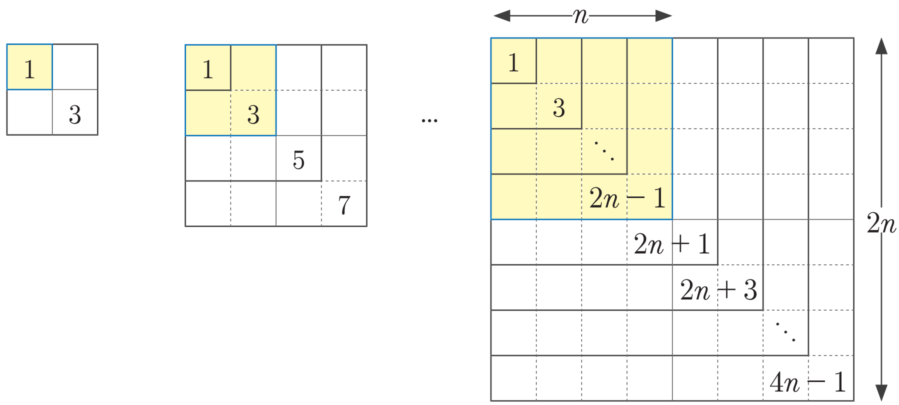


$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \ldots = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(2n+2n-1)}$$

Hình 87.

TỈ LỆ GALILEO

Alfinio Flores và Hugh Sanders



$$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{5+7}=\frac{1+3+5}{7+9+11}=\ldots=\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}$$

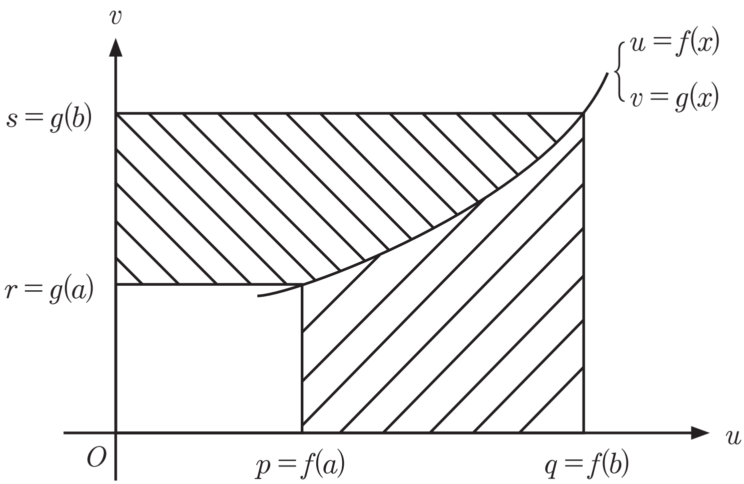
$$=\frac{n^2}{(2n)^2-n^2}=\frac{n^2}{3n^2}=\frac{1}{3}$$

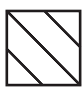
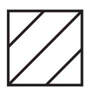
Hình 88.

CÁC CÔNG THỨC GIẢI TÍCH

CÔNG THỨC TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Richard Courant



diện tích  + diện tích  $= qs - pr$

$$\int_r^s u\,\mathrm{d}v + \int_p^q v\,\mathrm{d}u = uv\Big|_{(p,\, r)}^{(q,\, s)}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Hình 89.

PHỤ LỤC

Nội dung sau chỉ mang tính chất tham khảo, bạn hãy nhớ rằng có những lúc chứng minh không dùng lời không phải là một chứng minh thực sự, và một chứng minh không dùng lời có thể được hiểu cũng như biểu đạt theo nhiều hướng khác nhau. Ngoài ra, theo đúng như tên gọi của nó, chứng minh không dủng lời nên được nắm bắt bằng cách quan sát - tư duy - lĩnh hội - không nhất thiết biểu đạt bằng lời trừ trường hợp phải diễn giải cho người khác.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN

Hình 8. *trang 29*

Các hình vuông đều có cạnh 1. Số các ô vuông bằng diện tích phần màu trắng và màu cam. Phần màu trắng là nửa hình vuông cạnh n. Phần màu cam là n nửa hình vuông nhỏ.

Hình 9. *trang 30*

Xin dành cho bạn đọc.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN

Hình 10. *trang 31*

Hai phần tổng các số chấm tròn lẻ khi ghép lại sẽ được một hình vuông và dư ra một phần bằng độ dài đường chéo của chính hình vuông này. Như vậy, hai lần tổng các số chấm tròn $(2(1+3+5+ ...))$ bằng với số chấm tròn trong

hình vuông ($n \times n = n^2$) và số chấm dư ra (n).

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

Hình 11. *trang 32*

Phần này rất đơn giản, xin dành cho bạn đọc.

Hình 12. *trang 33*

Số các chấm tròn 1, 3, 5,… $2n - 1$ có thể xếp thành hình tam giác. Gấp bốn số lượng này sẽ xếp được thành hình vuông cạnh $2n$. Tổng cần xét chính bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình vuông này.

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN

Hình 13. *trang 34*

n^2 chấm tròn có thể xếp thành một hình tam giác lớn lần lượt đi từ trên xuống dưới là 1, 3, 5,... $2n - 1$ chấm.

Hình 14. *trang 35*

Thêm một sự bố trí, sắp xếp khác các chấm tròn để tìm ra hình mẫu đi đến công thức. Đây là một bảng vuông $n \times n$ ô, mỗi ô có hai chấm tròn nên tổng số chấm là $2n^2$. Nhìn lần lượt theo mỗi đường chéo, số chấm tròn là 1, 3, 5,..., $2n - 1$, $2n - 1$,..., 5, 3, 1. Do đó

$$2n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n - 1) + ... + 5 + 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\,[1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)] = 2n^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Một cách lý giải khác: đây là cách sắp xếp tương tự như Hình I.151, thêm phần tam giác phía dưới để tạo ra hình vuông.

TỔNG VÀ BÌNH PHƯƠNG (TỔNG N SỐ LẺ ĐẦU TIÊN)

Hình 15. *trang 36*

Sự phân hoạch hợp lý các chấm tròn dẫn đến công thức cần tìm.

TỔNG VÀ BÌNH PHƯƠNG (TỔNG N SỐ LẺ ĐẦU TIÊN)

Hình 16. *trang 37*

Sự phân hoạch hợp lí các chấm tròn dẫn đến công thức cần tìm.

TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG

Hình 17. *trang 38*

Gần giống với Hình 12., sắp xếp hợp lý sẽ cho ra câu trả lời.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

Hình 18. *trang 39*

n^2 hình tam giác nhỏ sẽ xếp được thành một hình tam giác lớn hơn với n tầng. Điều đó có nghĩa là số hình tam giác bằng bình phương số tầng. Ở hình tam giác lớn, số tầng là $1 + 2 + 3 + ... + n$, vậy số tam giác là $(1 + 2 + 3 + ... + n)^2$. Hơn nữa, ở mỗi lớp 1 tầng, 2 tầng, 3 tầng,... n tầng đều được phân thành những hình tam giác lớn hơn (cạnh đậm), trong trường hợp dư ra phần hình bình hành, nó có thể được cắt phần trên đưa xuống dưới để được hình tam giác như hình minh hoạ. Như vậy, lần lượt ở mỗi lớp 1 tầng, 2 tầng, 3 tầng,... n tầng sẽ có 1.1^2, 2.2^2, 3.3^2,... $n.n^2$ hình tam giác. Kết quả sau cùng

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$$

Lý luận $(1 + 2 + 3 + ... + n)^2$ còn có thể giải thích là diện tích tam giác cân cạnh đáy $(1 + 2 + 3 + ... + n)$ đơn vị, chiều cao $(1 + 2 + 3 + ... + n)$ đơn vị được dựng từ các tam giác cân nhỏ cạnh đáy 1 đơn vị, chiều cao 1 đơn vị.

Hình 19. *trang 40*

Bản chất của phương pháp này nằm ở cách hiểu tổng

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 +... + n^3$$

chính bằng

$$1.1^2 + 2.2^2 + 3.3^2 + 4.4^2 + 5.5^2 +... + n.n^2$$

là sự biểu diễn thông qua đại số hình ảnh tổng của các ô vuông nhỏ

1 ô cạnh 1, 2 ô vuông cạnh 2, 3 ô vuông cạnh 3,

4 ô vuông cạnh 4, 5 ô vuông cạnh 5, ... , n ô vuông cạnh n

Bốn lần tổng sẽ được biểu diễn hình học bởi hình vuông có độ dài cạnh bằng $n^2 + n$.

Hình 20. *trang 41*

Nếu tìm được cách sắp xếp $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ ô vuông nhỏ thành một hình vuông lớn có độ dài cạnh $1 + 2 + 3 + ... + n$, diện tích tương ứng là $(1 + 2 + 3 + ... + n)^2$ thì coi như công thức được chứng minh. Một trong các cách sắp xếp đó như sau:

- Xếp $1^3 = 1$ ô vuông vào góc trên cùng bên trái.
- Xếp $2^3 = 8$ ô vuông theo hình chữ L ngược (┘) bao lấy 1 ô vuông trước đó.
- Xếp $3^3 = 27$ ô vuông heo hình chữ L ngược (┘) bao lấy $9 = 1^3 + 2^3$ ô vuông trước đó.
- Xếp $4^3 = 64$ ô vuông heo hình chữ L ngược (┘) bao lấy $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ ô vuông trước đó.
- ...cứ như thế...

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG

Hình 21. *trang 42*

Tương tự như trên, sự sắp xếp hợp lí các ô vuông sẽ dẫn đến câu trả lời.

Hình 22. *trang 43*

Các hình vuông cạnh 1, 2, 3,... n đơn vị được sắp xếp một cách hợp lí, logic để đi đến kết quả. Khoảng cách từ tâm hình vuông đến cạnh là $1 + 2 + ... + n$, do đó cạnh hình vuông là $2(1 + 2 + ... + n)$ và diện tích là

$$[2\,(1 + 2 + ... + n)]^2 = [n(n + 1)]^2$$

Hình 23. *trang 44*

Gần giống như trên, sắp xếp 1 hình vuông cạnh 1 đơn vị, 2 hình vuông cạnh

2 đơn vị, 3 hình vuông cạnh 3 đơn vị,... n hình vuông cạnh n đơn vị vào một hình vuông lớn cạnh $1 + 2 + 3 + ... + n$. Các phần màu trắng bị khuyết coi như được bù vào bởi phần được chồng lên nhau. Tổng diện tích của các hình vuông nhỏ bằng $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$, diện tích cả hình vuông lớn bằng $(1 + 2 + 3 + ... + n)^2$, chúng bằng nhau

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU TIÊN (III), TỔNG N SỐ TỰ NHIÊN LẺ ĐẦU TIÊN (IV) VÀ TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG (III)

Hình 24. *trang 45*

Quan sát hình, bạn có thể thấy, các hình vuông đơn vị (cạnh 1) được xếp theo hình bậc thang: 1 hình vuông cạnh 1, 2 hình vuông cạnh 2, 3 hình vuông cạnh 3,..., n hình vuông cạnh n, tổng diện tích là $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$. Dựng đường chéo nối các đỉnh góc trên bên trái của mỗi hình vuông ngoài cùng, mỗi hình tam giác dư ra phía trên đúng bằng mỗi hình tam giác được tạo thành bên dưới đường chéo. Vì có n hình vuông cạnh n dưới cùng nên cạnh đáy của hình tam giác này là $n^2 + n = (n + 1)n$, mặt khác cạnh này cũng bằng $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + ... + n + n = 2(1 + 2 + 3 + ... + n)$. Chúng ta được công thức thứ nhất

$$(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hình tam giác lớn được tạo thành có chiều cao $1 + 2 + 3 +... + n$, nên diện tích của nó bằng $\frac{1}{2}.(1 + 2 + 3 +... + n).\frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ và cũng bằng diện tích của hình bậc thang ban đầu. Chúng ta có công thức thứ hai

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Cuối cùng

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

TÍNH TỔNG NHỜ NHỮNG QUÂN DOMINO

Hình 25. *trang 46*

Đây không phải là một công thức phổ biến nhưng nó cho chúng ta thấy chứng minh không dùng lời có thể rất hữu hiệu trong cách giải.

TỔNG CÁC LẬP PHƯƠNG (IV)

Hình 26. *trang 47*

Tách các khối lập phương $2\times2\times2$, $3\times3\times3$, $4\times4\times4$,... thành các phần hợp lý để ghép lại được khối hình mới cuối cùng có kích thước ngang × dọc × sâu là

$$(1+2+3+..+n)\times(1+2+3+...+n)\times1$$

Thể tích bằng thể tích, cuối cùng, chúng ta được

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$$

TỔNG LIÊN TIẾP CÁC TÍCH HAI SỐ LIỀN NHAU

Hình 27. *trang 48*

Sự sắp xếp hợp lý những khối lập phương đơn vị.

CHUỖI (TỔNG VÔ HẠN): TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/2

Hình 28. *trang 51*

Phần này vô cùng trực quan và dễ hình dung. Một hình vuông cạnh 1 đơn vị được chia đôi liên tiếp thì tổng tất cả các phần được chia hiển nhiên cũng bằng 1.

Hình 29. *trang 52*

Tương tự như Hình I.168 nhưng thay vì cắt đôi thì hình vuông được cắt theo đường chéo và mỗi nửa hình tam giác cân thì được chia theo đường cao của nó (cũng là đường trung tuyến hay đường phân giác).

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/3

Hình 30. *trang 53*

Chia hình vuông thành ba phần bằng nhau (ba hình chữ nhật) bởi hai đường nét đứt ngang, mỗi phần $\frac{1}{3}$. Phần nằm giữa lại chia ba theo đường liền đứng, mỗi phần $\frac{1}{3}$ của $\frac{1}{3}$, tức là $\frac{1}{9}$. Cứ thực hiện liên tiếp như vậy cho đến vô hạn lần. Các phần được chia nhỏ ngày càng tiến gần đến tâm hình vuông theo hình đường xoắn ốc. Tổng tất cả các phần sẽ bằng $\frac{1}{2}$.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/4

Hình 31. *trang 54*

Mỗi một hình vuông màu tương ứng với hai hình vuông trắng. Do đó chuỗi bằng $\frac{1}{3}$.

Hình 32. *trang 55*

Dành cho bạn đọc.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/5

Hình 33. *trang 56*

Năm hình vuông bằng nhau xếp theo hình chữ thập đặt vào hình vuông lớn với cạnh gấp đôi theo cách như ảnh thì khi đó mỗi hình tam giác dư ra phía ngoài sẽ được bù bởi hình tam giác bên trong. Tương tự, đặt năm hình vuông nhỏ khác xếp theo hình chữ thập với cạnh kém hai lần so với hình vuông nhỏ ban đầu vào hình vuông nhỏ nằm trọn trong hình vuông lớn theo cách thức cũ. Thực hiện liên tiếp như vậy vô hạn lần, bạn có được chuỗi tam giác liền nhau tiến vào tâm hình vuông lớn. Có bốn chuỗi tam giác như thế nên kết quả sẽ bằng $\frac{1}{4}$.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/9

Hình 34. *trang 57*

Từ đa giác 8-cạnh đều cạnh 1 đơn vị. Vẽ một đa giác 8-cạnh đều cạnh $\frac{1}{3}$ nằm bên trong chính giữa của nó, đa giác nhỏ này chiếm $\frac{1}{3}$ đa giác lớn. Cứ như thế

tiến sâu vào tâm sau vô hạn lần.

CHUỖI: TỔNG CÁC LUỸ THỪA GIẢM VÔ HẠN CỦA 1/2, 1/3, 1/4, 1/5

Hình 35. *trang 58*

Dành cho bạn đọc.

CHUỖI ĐAN DẤU

Hình 36. *trang 59*

Một hình vuông được phân chia làm ba phần bằng nhau, từng phần của nó lại được chia theo một nửa bớt đi một nửa của một nửa. Thực chất đây cũng chính là chuỗi $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{3}$.

CHUỖI ĐAN DẤU

Hình 37. *trang 60*

Phần không tô màu là phần bị lấy đi, phần tô màu là phần còn lại. Từ hình chữ L ban đầu, lần lượt bỏ rồi lấy một phần là các luỹ thừa liên tiếp của $\frac{1}{2}$. Thực hiện với số lần tiến đến vô cùng thì hình ảnh nhận được là hình chữ L bị mất đi 1 phần.

Hình 38. *trang 61*

Tương tự như trên, từ hình vuông ban đầu được chia làm ba phần bằng nhau, lần lượt bỏ rồi lấy một phần là các luỹ thừa liên tiếp của $\frac{1}{3}$. Thực hiện với số lần tiến đến vô cùng thì hình ảnh nhận được là hình vuông được chia làm bốn phần là bốn tam giác bằng nhau. Trong đó, có ba tam giác được tô màu. Vậy kết quả bằng $\frac{3}{4}$.

CHUỖI: TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Hình 39. *trang 62*

Vì $0 < r < 1$ nên khi càng nâng luỹ thừa r, giá trị nhận được càng nhỏ và $\frac{1}{r} > r$. Cả tam giác lớn đồng dạng tam giác màu xanh, ta có được đẳng thức.

Hình 40. *trang 63*

Đây là trường hợp riêng khi $a = 1$. Vì $0 < r < 1$ nên càng nâng luỹ thừa r, giá trị nhận được càng nhỏ. Áp dụng tam giác đồng dạng, ta có đẳng thức.

Hình 41. *trang 64*

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, với các điểm trên hoành độ

$$a, \;\; a + ar, \;\; a + ar + ar^2, \ldots$$

thì tung độ tương ứng trên đường thẳng $y = x$ cũng vậy

$$a, \;\; a + ar, \;\; a + ar + ar^2, \ldots$$

còn tung độ tương ứng trên đường thẳng $y = a + rx$ là

$$a + ar, \;\; a + ar + ar^2, \;\; a + ar + ar^2 + ar^3, \ldots$$

Từ đó, bạn có thể tính, tức là giải thích các độ dài như hình ảnh thể hiện. Ngoài ra, phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y = x$ và $y = a + rx$ là

$$x = a + rx$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{1 - r}$$

Suy ra tung độ giao điểm là

$$y = \frac{a}{1 - r}$$

Chúng ta có được kết quả

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{a}{1 - r}$$

Hình 42. *trang 65*

Vì $0 < r < 1$ nên $0 < \ldots < r^3 < r^2 < r < 1$ và $0 < \ldots < ar^3 < ar^2 < ar < a$. Từ đoạn nối điểm r và 1 trên trục hoành, dựng hình chữ nhật có diện tích a, vì đoạn nối điểm r đến điểm 1 là $1 - r$ nên chiều cao hình chữ nhật này là $\frac{a}{1 - r}$. Tương tự như vậy, dựng hình chữ nhật có diện tích ar trên đoạn nối r^2 và r, chiều cao của nó cũng là $\frac{ar}{r - r^2} = \frac{a}{1 - r}$. Cứ như thế, bạn có dãy hình chữ nhật liên tiếp ngày càng nhỏ tiến về phía trục tung, tổng diện tích tất cả chúng

hiển nhiên là $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$, đồng thời cũng bằng $1 \cdot \frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-r}$.

CHUỖI LUỸ THỪA

Hình 43. *trang 66*

Kết quả cần cho phần chứng minh này là

$$a > 0,\ 0 < r < 1$$
$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... = \frac{a}{1-r}$$

Đầu tiên, với hình vuông cạnh 1 đơn vị, vẽ liên tiếp các hình chữ nhật lần lượt trên các cạnh bên phải và bên trên hình vuông có diện tích $x, x^2, x^3, ...$ Vì $0 \leq x < 1$ nên các hình chữ nhật này ngày càng nhỏ lại. Hình vuông lớn mới có độ dài cạnh $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ nên diện tích bằng $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^2$, sử dụng kết quả trên cho trường hợp $a = 1$, $r = x$, ta có kết quả cần chứng minh.

LUẬT COSIN

Hình 44. *trang 69*

Phần này rất đơn giản, xin dành cho bạn đọc. Ở đây, các đại lượng ban đầu là θ, a, b, c.

LUẬT COSIN

Hình 45. *trang 70*

Dựng ba hình vuông trên ba cạnh a, b, c của tam giác. Tính được $b\sin\theta$, $b\cos\theta$. Tính được diện tích ba hình vuông và áp dụng định lí Pythagoras, bạn có được công thức cần tìm.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN TỔNG, COS TỔNG

Hình 46. *trang 71*

Công thức lượng giác sin tổng, cos tổng với $x + y \leq 90^o$. Dựng tam giác vuông cạnh huyền 1 đơn vị, góc nhọn $x + y$. Dựng trên góc y tam giác vuông cùng

cạnh huyền 1 đơn vị đó. Dựng hình chữ nhật bao lấy phía ngoài thoả mãn như hình vẽ. Đầu tiên, chúng ta xác định được hai cạnh góc vuông của tam giác vuông góc nhọn y là $\sin y$, $\cos y$, từ đó dễ dàng xác định được các cạnh góc vuông của hai tam giác vuông trên và dưới bên phải, vì biết được một góc nhọn và cạnh huyền của chúng. Lúc này, độ dài chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật phía ngoài có hai cách biểu diễn, và đó chính là công thức của chúng ta.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN HIỆU, COS HIỆU

Hình 47. *trang 72*

Tương tự với công thức sin tổng, cos tổng.

Hình 48. *trang 73*

1/ Một cách khác với công thức lượng giác sin tổng, cos tổng với $x + y \leq 90^o$. Dựng lần lượt hai tam giác vuông góc nhọn x, góc nhọn y chung một cạnh góc vuông. Khi đó, $\sin x$, $\sin y$ hình thành vì chúng là cạnh góc vuông của tam giác vuông cạnh huyền 1, $x + y$ hình thành vì tính chất góc ngoài tam giác, từ đó có $\sin(x + y)$, cuối cùng $\frac{\sin y \cos x}{\sin x}$ là kết quả của *cạnh góc vuông kia nhân cotan góc kề*.

2/ Tương tự.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN HIỆU, COS HIỆU

Hình 49. *trang 74*

Tương tự với công thức sin tổng, cos tổng (II).

Hình 50. *trang 75*

Tam giác giữa là đối tượng ban đầu cùng với các đại lượng x, y, a, b. Các đại lượng còn lại dễ dàng tính ra được. Sau đó dùng công thức tính diện tích tam giác bằng tích hai cạnh và sin góc xen giữa. Ở hình thứ hai, bạn cần nhớ rằng hai góc phụ nhau thì cos góc này bằng sin góc kia.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN TỔNG

Hình 51.	*trang 76*

Tam giác ba cạnh a, b, c nội tiếp đường tròn đường kính 1 đơn vị. Dựng đường cao để có được hai tam giác vuông, tính được $c = a\cos y + b\cos x$. Sử dụng tính chất góc ở tâm bằng nửa số đo cung bị chắn và đường kính vuông góc dây cung thì đi qua trung điểm của nó để đi đến $\sin z = c$, $\sin x = a$, $\sin y = b$. Cuối cùng, hai góc bù nhau thì sin bằng nhau, tổng ba góc tam giác bằng $180^o = \pi$ (rad), chúng ta có kết luận cuối cùng.

Hình 52.	*trang 77*

Với hai tam giác vuông cạnh huyền a, b, đường cao h chung và hai góc nhọn tương ứng x, y kề đường cao đó thì từ công thức tính diện tích tam giác bằng tích hai cạnh và sin góc xen giữa, bạn có được điều phải chứng minh.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC COS TỔNG

Hình 53.	*trang 78*

Công thức lượng giác cos tổng với $x + y \leq 90^o$.

Chia một tam giác vuông góc nhọn y, cạnh huyền a theo cạnh b. Diện tích tam giác trên bằng diện tích cả tam giác trừ diện tích tam giác dưới. Áp dụng tính chất với hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia và giản ước hai vế, bạn có được công thức cos tổng.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN TỔNG, TAN HIỆU

Hình 54.	*trang 79*
Hình 55.	*trang 80*

Tương tự với công thức sin tổng, cos tổng.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN TỔNG, TAN HIỆU

Hình 56. *trang 81*

Dựng hai tam giác vuông chung cạnh góc vuông 1 trên cùng một nửa mặt phẳng với góc nhọn x, y tương ứng. Vẽ góc $x-y$ giữa hai góc này, từ giao điểm cạnh này với cạnh góc vuông còn lại, dựng đường vuông góc đến cạnh huyền. Đó là những yếu tố đầu tiên cho công thức.

Dễ dàng có $AC=\tan x, DC=\tan y \Rightarrow AD=\tan x-\tan y$.

$\widehat{EDA}=\widehat{EBC}=x$ vì cùng phụ $\widehat{EAD}$

$\Rightarrow \widehat{CDF}=\widehat{EDA}=x$ (đối đỉnh) $\Rightarrow CF=CD\tan x=\tan x\tan y$.

Lập tỉ số đồng dạng của hai tam giác đồng dạng BEF và DEA, thay bởi các đại lượng cần thiết, chúng ta có được công thức tan hiệu.

Hình 57. *trang 82*

Trục toạ độ, nửa đường tròn đường kính OA, đường thẳng vuông góc trục hoành tại A, hai góc $\widehat{AOC}=x$, $\widehat{AOB}=y$ là những đối tượng ban đầu. Đầu tiên tính được

$$AC=\tan x\ ,\ AB=\tan y\ ,\ OB=\frac{1}{\cos y}$$

Suy ra

$$EB=\frac{1}{\cos y}\tan(x-y)$$

mà

$$\widehat{OEB}=90-x+y\Rightarrow\widehat{BED}=90-y\Rightarrow\widehat{DBE}=y$$

nên

$$DB=EB\cos y=\tan(x-y)$$

$$\Rightarrow ED=\sqrt{EB^2-DB^2}=\tan(x-y)\tan y$$

$$\Rightarrow CD=ED\tan x=\tan(x-y)\tan y\tan x$$

Từ đó chúng ta có công thức cần chứng minh.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN ĐÔI

Hình 58. *trang 83*

Tương tự với công thức sin tổng, cos tổng.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN ĐÔI

Hình 59. *trang 84*

Tỉ số có được là nhờ công thức tính diện tích tam giác theo sin góc xen giữa, diện tích tam giác cân bằng hai lần diện tích tam giác vuông, vì sin góc này bằng cos góc kia nếu hai góc phụ nhau nên tỉ số cũng bằng $\cos x$. Từ đó, bạn có được công thức sin góc nhân đôi.

Công thức cos góc nhân đôi cũng không khó để có được.

Hình 60. *trang 85*

Công thức lượng giác sin, cos góc nhân đôi của góc nhọn. Góc ở tâm bằng $2x$ vì nó gấp đôi góc nội tiếp với cùng cung bị chắn. Cạnh huyền bằng 2 đơn vị nên hai cạnh góc vuông tương ứng bằng $2\sin x$, $2\cos x$. Từ đó, lập các tỉ số đồng dạng để đi đến công thức.

Hình 61. *trang 86*

1/ Dựng một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng 2. Diện tích hai tam giác vuông được tô cùng màu ở hai hình là như nhau. Bên trái hiển nhiên là $2\sin x\cos x$ (tích hai cạnh góc vuông), bên phải là $\sin 2x$ (nửa tích đường cao và cạnh đáy). Từ đó, bạn có được công thức sin góc nhân đôi.

2/ Diện tích hình chữ nhật bên trái là $2\cos^2 x$, bằng diện tích hình bình hành bên phải (được tô cùng màu), diện tích này bằng cả diện tích hình chữ nhật nghiêng trừ hai lần diện tích cả hình tam giác phía trên. Bạn đọc có thể tự tính để ra kết quả.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CỘNG SIN, CỘNG COS

Hình 62. *trang 87*

Dựng tam giác vuông cạnh huyền 1 đơn vị, góc nhọn y. Chia tam giác vuông này thành hai phần theo đường đi qua góc nhọn kia sao cho một phần là một

tam giác vuông góc nhọn x. Tất cả những đại lượng còn lại được sắp đặt sao cho phù hợp với công thức. Thực ra, đây là một biểu diễn hình học hơn là một chứng minh.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRỪ SIN, TRỪ COS

Hình 63. *trang 88*

Tương tự công thức lượng giác cộng sin, cộng cos (II).

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TỔNG SIN COS

Hình 64. *trang 89*

Từ hình vẽ ban đầu với các số đo A, B, R, x, α, β, dễ dàng xác định được các đại lượng còn lại:

+) $B\sin\alpha$, $B\cos\beta$ là vì "cạnh huyền nhân sin góc đối hoặc cosin góc kề".

+) $A\sin x$ cũng vậy, nó bằng cạnh góc vuông đối diện góc nhọn x của tam giác vuông cạnh huyền A bên dưới góc trái.

+) $B\sin(x+\beta)$ là cạnh góc vuông đối diện góc nhọn $x+\beta$ của tam giác vuông cạnh huyền B.

Từ đó, suy ra các đại lượng cần thiết, và khi $\beta = \frac{\pi}{2}$, chúng ta có công thức cuối cùng $A\sin x + B\cos x = \sin(x+\alpha)$.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CỘNG SIN, CỘNG COS

Hình 65. *trang 90*

Chứng minh này không phức tạp như hình ảnh mà nó thể hiện. Trong đường tròn đơn vị, dựng bốn góc ở tâm x, y, α, β. Hiển nhiên, cạnh của góc x cắt đường tròn tại $(\cos x, \sin x)$, cạnh của góc y cắt đường tròn tại $(\cos y, \sin y)$. Gọi (t, s) là trung điểm của đoạn nối hai điểm này thì khi đó

$$s = \frac{\sin x + \sin y}{2} \text{ và } t = \frac{\cos x + \cos y}{2}$$

Hơn nữa, trong tam giác vuông cạnh đậm góc nhọn β, cạnh huyền của nó là $\cos\alpha$ nên $s = \cos\alpha\sin\beta$ và $t = \cos\alpha\cos\beta$, chúng ta được công thức cần tìm.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRỪ SIN, TRỪ COS

Hình 66. *trang 91*

Tương tự công thức cộng sin, cộng cos (I). Ở đây, chỉ có góc nhọn phía trên cùng bên trái là cần phải xác định, đó chính là góc β. Bạn có thể xác định từ góc đồng vị - góc kề bù - tổng bốn góc của tứ giác bằng 360^o.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TAN GÓC CHIA ĐÔI

Hình 67. *trang 92*

Tương tự công thức sin, cos góc nhân đôi.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC SIN, COS GÓC NHÂN BA

Hình 68. *trang 93*

Với góc nhọn x bất kỳ, bạn có thể dựng được hình tam giác cân trong một hình chữ nhật thoả mãn các số đo các góc như hình. Có thể coi hai cạnh bên của tam giác cân bằng 1 đơn vị. Khi đó cạnh đáy của nó là $2\cos 2x$. Vì cạnh góc vuông được xác định bởi "cạnh huyền nhân sin góc đối hoặc cosin góc kề" nên bạn có thể xác định được toàn bộ các cạnh góc vuông của ba tam giác vuông bên trên, bên phải, góc dưới trái. Lúc này, mỗi cạnh của hình chữ nhật có hai cách biểu diễn, kết hợp công thức cosin góc nhân đôi để biến đổi, bạn có được công thức nhân ba.

MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÁC

Hình 69. *trang 94*

Từ vị trí của đường tròn bán kính 1 và hình vuông cạnh 1, với giá trị của góc nhọn x tuỳ ý, dễ dàng có được bốn công thức lượng giác quen thuộc.

MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Hình 70. *trang 95*

Tương tự công thức lượng giác sin, cos góc nhân ba.

ĐẠI SỐ HOÁ HÀM LƯỢNG GIÁC

Hình 71. *trang 96*

Từ tam giác vuông góc nhọn $\frac{x}{2}$, hai cạnh góc vuông 1 và z, dựng trên cạnh huyền tam giác vuông góc nhọn $\frac{x}{2}$.

cạnh huyền $1 + z^2$ như ảnh, từ đó có được công thức cần tìm.

ĐẠI SỐ HOÁ HÀM LƯỢNG GIÁC

Hình 72. *trang 97*

Đây là một sự biến đổi đại số bằng hình học hơn là một chứng minh.

Hình 73. *trang 98*

Nửa đường tròn tâm O bán kính đơn vị với góc nội tiếp $\widehat{AED}$ chắn nó, $\widehat{EAD} = \frac{x}{2}$. Vẽ EC vuông góc AD tại C, giao điểm của AE với đường vuông góc AD tại O là B. Đặt $u = OB$.

Tất cả các đại lượng còn lại được xác định vô cùng dễ dàng, từ đó lập tỉ số tam giác đồng dạng, chúng ta có được sự đại số hoá các hàm lượng giác.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Hình 74. *trang 101*

Sử dụng hệ thức lượng của tam giác vuông và tính chất đường kính là dây lớn nhất, ta có được bất đẳng thức.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Hình 75. *trang 102*

Diện tích hình vuông lớn bằng tổng diện tích bốn hình chữ nhật và hình vuông nhỏ. Do đó, diện tích hình vuông lớn luôn lớn hơn hoặc bằng diện tích bốn hình chữ nhật.

Hình 76. *trang 103*

Diện tích hình vuông ngoài bằng $(a + b)^2$ hiển nhiên lớn hơn hoặc bằng tổng

diện tích tám hình tam giác vuông bên trong nó, tất cả đều có hai cạnh góc vuông a, b nên

$$(a+b)^2 \geq 8.\frac{1}{2}.ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

Hình 77.	*trang 104*

Hai đường tròn tiếp xúc nhau lần lượt có đường kính và a, b tuỳ ý ($a \geq b > 0$). Vẽ hai đường kính của hai đường tròn song song nhau. Dựng đoạn vuông góc từ tâm đường tròn nhỏ đến đường kính đường tròn lớn. Khi đó, khoảng cách từ chân đường vuông góc này đến tâm đường tròn lớn là $\frac{a-b}{2}$, độ dài đoạn nối tâm bằng tổng hai bán kính $\frac{a+b}{2}$. Sử dụng định lí Pythagoras tính được cạnh góc vuông còn lại (đường nét đứt)

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{ab}$$

Cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền, từ đó có được bất đẳng thức.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM-HM

Hình 78.	*trang 105*

Với độ dài a, b ($a \geq b > 0$) cho trước, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính được AM, GM, HM. Từ tính chất cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền, bất đẳng thức được hình thành. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

BẤT ĐẲNG THỨC HM-GM-AM-RM

Hình 79.	*trang 106*

Xây dựng một dãy các tam giác vuông mà mỗi cạnh huyền của tam giác vuông này là cạnh góc vuông của tam giác vuông tiếp theo.

BẤT ĐẲNG THỨC HM-GM-AM-RM

Hình 80.	*trang 107*

Thực ra phần này không khó như vẻ ngoài của nó, tất cả chỉ là định lý

Pythagoras và tính chất cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông. Với độ dài a, b ($a > b > 0$) cho trước, vẽ P, Q, M thẳng hàng sao cho $PM = a$, $QM = b$, đường tròn tâm trung điểm PQ, đường kính PQ. Khi đó

$$R = AG = AR = AQ = \frac{PM - QM}{2} = \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow AM = AQ + QM = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow GM = \sqrt{AM^2 - AG^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

$$\text{và } RM = \sqrt{AR^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$HM = \frac{GM^2}{MA} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông

$$HM < GM < AM < RM$$

BẤT ĐẲNG THỨC X + 1/X ≥ 2

Hình 81. *trang 108*

Các cách này vô cùng đơn giản, có lẽ không cần sự phân tích ở đây.

BẤT ĐẲNG THỨC JORDAN

Hình 82. *trang 109*

Với đường tròn tâm O, bán kính đơn vị, dựng $\widehat{POA} = x$ (radian) không tù. Từ P, dựng dây PQ vuông góc OA tại M, dựng đường tròn tâm M, bán kính MP ($=\sin x$), cắt đường thẳng OA tại B.

Ta có $OB = OM + MB = OM + MP \geq OP = OA\ (=1)$, suy ra $\overset{\frown}{PBQ} \geq \overset{\frown}{PAQ} \geq PQ$

Dựa vào công thức tính cung tròn

$$l = \frac{\pi R n^o}{180^o} = Rn \text{ (rad)}$$

ta được $\overset{\frown}{PBQ} = \pi \sin x$, $\overset{\frown}{PAQ} = 2\sin x$. Từ đó có được điều phải chứng minh.

ĐỊNH LÍ PYTHAGORAS

Hình 85. *trang 113*

Lập tỉ số các cạnh của các tam giác đồng dạng. Nếu $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ thì ta được điều phải chứng minh.

KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Hình 86. *trang 114*

Mấu chốt của vấn đề là dựng tam giác vuông hai cạnh góc vuông 1 và a để lập được tỉ số đồng dạng.

TỈ LỆ GALILEO

Hình 87. *trang 117*

Hình 88. *trang 118*

Ngoài cách biến đổi đại số thông thường, sự biểu diễn tỉ số bằng sơ đồ, hình vẽ là cách thức trực quan sơ cấp và dễ hiểu. Vì vậy mà phần này có lẽ thực sự không cần dùng đến lời lẽ.

CÔNG THỨC TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Hình 89. *trang 121*

Bạn cần nắm rõ định nghĩa tích phân để hiểu được chứng minh này.

Đầu tiên, diện tích phần gạch sọc bằng diện tích cả hình chữ nhật lớn trừ diện tích hình chữ nhật nhỏ (trắng). Mỗi phần diện tích gạch sọc đúng bằng tích phân của hàm tương ứng với cận tương ứng. Sau đó, thay $u = f(x)$, $v = g(x)$, chúng ta có được công thức tích phân toàn phần.